

Compito di Analisi Matematica III, Corso B

Corso di Laurea in Fisica, A.A. 2007/08

Pisa, 16 settembre 2008

1) Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' &= x - ay \\ y' &= ax - y. \end{cases}$$

- Si scrivano tutte le soluzioni del sistema al variare del parametro reale a .
- Si disegnino le orbite delle soluzioni nel piano delle fasi (x, y) .
- Per quali valori di a le soluzioni sono periodiche?

2) Si consideri la funzione

$$f_\alpha(x, y, z) = \frac{\log(z^2)}{(x^2 + y^2)^\alpha z^2}.$$

Si dica per quali valori del parametro reale α la funzione è integrabile sul dominio

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z^4 \leq 1\}$$

e, nel caso, si calcoli l'integrale

$$\int_D f_\alpha \, dx dy dz.$$

3) Si consideri il campo di vettori

$$F(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x + x^2 z^2 + y^2 z^2}{x^2 + y^2}, 2yz \right).$$

- Si dica se il campo è conservativo.
- Si calcoli il lavoro del campo lungo la curva chiusa

$$\gamma(t) = (\sin(t), \cos(t), g(t)) \quad t \in [0, 2\pi],$$

dove la funzione $g \in C^1([0, 2\pi])$ è tale che $g(0) = g(2\pi)$.