

1) Si dica per quali valori del parametro reale α il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \alpha y \\ \dot{y} = \alpha x - y \\ x(0) = x(\pi) \\ y(0) = y(\pi) \end{cases}$$

ammette soluzioni non banali e, nel caso, si determinino tali soluzioni.

2) Si consideri l'insieme

$$S = \{x^2 + y^2 + z \leq 18, x^2 + y^2 - z^4 \leq 0, z \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3.$$

a) Si calcoli il momento di inerzia di S rispetto all'asse z .

b) Si dica per quali valori di α la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^\alpha}$$

è integrabile su S e, nel caso, se ne calcoli l'integrale.

3) Si consideri la curva piana $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, definita da

$$\begin{cases} x(t) = 3 \cos(t) - \sin(3t) \\ y(t) = 3 \sin(t) - \cos(3t). \end{cases}$$

a) Si studi la curva γ , se ne disegni l'immagine e si mostri che tale immagine è la frontiera di un'unica regione limitata e connessa $D \subset \mathbb{R}^2$.

b) Si calcoli l'area della porzione di piano D racchiusa dalla curva.