

1) Si consideri l'equazione differenziale

$$t^2 u'' - 2tu' + 2u = \begin{cases} t \log |t| & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

- a) Si determinino le soluzioni dell'equazione definite sulla semiretta  $t > 0$ .
- b) Si determinino tutte le soluzioni dell'equazione e si dica in particolare se ci sono soluzioni definite su tutto  $\mathbb{R}$ .

2) Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = x + ay \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

al variare del parametro reale  $a$ .

- a) Si scrivano tutte le soluzioni del sistema nel caso  $a = 3$  e se ne tracci il grafico nel piano delle fasi  $(x, y)$ .
- b) Si trovino i valori del parametro  $a$  per i quali il sistema ammette soluzioni periodiche e, nel caso, se ne calcoli il periodo in funzione di  $a$ .

3) Si consideri la curva piana di equazione

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

- a) Si trovino la minima e la massima distanza dall'origine della parte di curva contenuta nel primo quadrante  $\{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ .
- b) Si trovino la minima e la massima distanza dall'origine dell'intera curva.