Compito di Analisi Matematica I e II

Corso di Laurea in Fisica, Corso A, A.A. 2003/04

Pisa, 6 settembre 2004

N.B.: chi intende sostenere l'esame di Analisi Matematica I e II svolga gli esercizi 2), 5) e 7)

I Parte.

1) Dato il parametro $\alpha \geq 0$ sia a_n la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = \alpha\, a_n + 1 \\ a_0 = 0. \end{cases}$$

Al variare del parametro α

1. si calcoli il limite $\lim_{n\to+\infty} a_n$;
2. si trovi l'espressione esplicita di a_n;
3. si risponda alle domande precedenti nel caso $\alpha < 0$.

2) Si discuta la convergenza, semplice e assoluta, delle seguenti serie

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\log\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n - 1 \right) ,$$
2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(n\pi + \frac{1}{n}\right) \frac{\arctan(n) \log(1+n)}{n} .$$

3) Data la funzione

$$f(x) = \cosh\left(e^x + \frac{1}{|1-x|}\right)$$

1. tracciare un grafico qualitativo della funzione giustificando il procedimento;
2. studiare l'esistenza di massimi, minimi relativi ed eventuali asintoti;
3. determinare per quali $y \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = y$ ammette soluzione e stabilirne la molteplicità.

4) [facoltativo] Determinare in quanti modi n persone possono sedersi attorno ad un tavolo con 8 sedie (nel caso $n > 8$ si intende che si siedono solo 8 persone scelte tra le n).

II Parte.

5) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$y'' - \alpha y = te^t$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

6) Si consideri l'equazione

$$4t^2 y'' + y = t.$$

1. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione, specificando il loro intervallo di esistenza;
2. determinare quali soluzioni si estendono con continuità nell'origine;
3. determinare, se esistono, le soluzioni definite (e regolari) su tutta le retta reale.

7) Tracciare un grafico qualitativo delle soluzioni dell'equazione

$$\begin{cases} u'(t) &= \sqrt{u(t)^2 - 1}\; e^t \\ \\ u(0) &= u_0, \end{cases}$$

al variare di $u_0 \in \mathbb{R}$.