Compito di Analisi Matematica I e II

Corso di Laurea in Fisica, Corso A, A.A. 2003/04

Pisa, 4 giugno 2004

N.B.: chi intende sostenere l'esame di Analisi Matematica I e II svolga gli esercizi 3), 5) e 6) (ed eventualmente il primo dei due esercizi facoltativi)

I Parte.

1) Dato il parametro $\alpha \in [0,1]$ sia a_n la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = \alpha a_n - a_n^2 \\ \\ a_0 = \dfrac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

Al variare del parametro α, si calcoli il limite $\lim_{n\to+\infty} a_n$.
[suggerimento: si provi la disuguaglianza $0 \le 2a_n \le \alpha^{n+1}$]

2) Si dica se esiste e, nel caso, si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(2\arctan(x^2))}{\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}.$$

3) Al variare del parametro $\alpha > 0$, si discuta la convergenza delle seguenti serie:

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^\alpha}\right)\right]^n - 1\right),$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right|^\alpha \sin(n).$$

4) [facoltativo] Si consideri l'insieme $X := \Big\{(x_1, x_2, x_3, x_4)$ tali che $2\,x_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ per ogni $1 \le j \le 4\Big\}$. Determinare il numero di elementi di X che soddisfano l'equazione

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4. \qquad (1)$$

II Parte.

5) Si dica per quali valori del parametro reale α esistono soluzioni $y(x)$ di classe $\mathbf{C}^2$, definite su tutto $\mathbb{R}$ e non identicamente nulle della seguente equazione differenziale

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + \alpha y(x) = 0.$$

Si determinino tali soluzioni.

6) Si studino le soluzioni della seguente equazione differenziale, al variare dei dati iniziali (x_0, y_0), e se ne tracci un grafico approssimativo:

$$\begin{cases} y'(x) &= -\dfrac{2e^{-y(x)^2}\,(1+y(x)^2)\ x}{2y(x)\,(1+y(x)^2)\,(2+\arctan(y(x)))+1} \\ \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$$

7) Al variare del parametro $\alpha > 0$, si dica se esiste e, nel caso, si calcoli il seguente limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\geq 0}} \frac{\Big(\log(1+x\ y^2)\Big)^{\alpha}}{x^2+y^4}.$$

8) **[facoltativo]** Sia $f_n(x):\ [0,1]\to\mathbb{R}$ una successione di funzioni di classe $\mathbf{C}^1$ tali che

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = x \qquad \forall x\in[0,1].$$

Si dimostri che

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_0^1 |f_n'(x)|^2\, dx \geq 1.$$

Si costruisca un esempio di successione in cui vale il $>$ nella precedente disuguaglianza.