**Secondo compitino di Analisi Matematica II**

*Corso di Laurea in Fisica, Corso A, A.A. 2003/04*

Pisa, 26 maggio 2004

**1)** Dire per quali valori dei parametri reali $\alpha, \beta$ esiste una soluzione della seguente equazione differenziale:

$$\begin{cases} x^2 y''(x) + 4xy'(x) + (x^2+2)y(x) &= x \\ y(0) &= \alpha \\ y'(0) &= \beta, \end{cases}$$

e trovare le eventuali soluzioni.

[si consiglia di effettuare il cambio di variabile $z(x) = x^2 y(x)$]

**2)** Si dica per quali valori del parametro reale $\alpha$ esiste finito il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos(|xy|^\alpha)^{\frac{1}{x^2+y^2}}.$$

**3)** Si studino le soluzioni della seguente equazione differenziale, al variare dei dati iniziali $(x_0, y_0)$, e se ne tracci un grafico approssimativo:

$$\begin{cases} y'(x) &= \dfrac{y+1}{(y+1)\log(y+1)+y}\sinh(t) \\ \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$$

Determinare le eventuali simmetrie delle soluzioni.
Determinare i dati iniziali per cui le soluzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$.

**4) [facoltativo]** Sia $\mathcal{P}_n$ l'insieme polinomi $P(x)$ di grado minore o uguale ad $n$ tali che

$$P(0) = 0 \qquad \max_{x\in[0,1]} |P(x)| \leq 1.$$

Si dimostri che il funzionale $\mathcal{F} : \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}$ definito da

$$\mathcal{F}(P) := \int_0^1 P(x)\, dx \qquad \text{per ogni } P \in \mathcal{P}_n$$

ammette massimo su $\mathcal{P}_n$.