

Laboratorio didattico di matematica computazionale

Beatrice Meini

Lezione 5 - 17/4/2013

1 La funzione meshgrid

L'istruzione `[X, Y] = meshgrid(x, y)` prende in input i vettori `x` e `y` e restituisce in output le matrici `X` e `Y` tali che: le righe di `X` sono tutte uguali al vettore `x`, e le colonne di `Y` sono tutte uguali al vettore `y`:

```
octave:1> x=[1:5]
x =
    1    2    3    4    5

octave:2> y=[6:11]
y =
    6    7    8    9   10   11

octave:3> [X,Y]=meshgrid(x,y);
octave:4> X
X =
    1    2    3    4    5
    1    2    3    4    5
    1    2    3    4    5
    1    2    3    4    5
    1    2    3    4    5
    1    2    3    4    5

octave:5> Y
Y =
    6    6    6    6    6
    7    7    7    7    7
    8    8    8    8    8
    9    9    9    9    9
   10   10   10   10   10
   11   11   11   11   11
```

Questo comando è molto utile per valutare una funzione definita su un rettangolo $[a, b] \times [c, d]$ di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ su una griglia di punti del rettangolo. Infatti, se la variabile `x` contiene una “discretizzazione” dell’intervallo $[a, b]$, e se `y` contiene

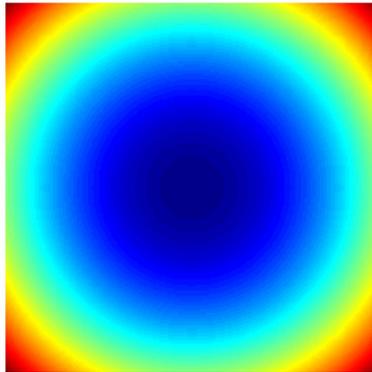
una discretizzazione dell'intervallo $[c, d]$, l'istruzione `[X, Y] = meshgrid(x, y)` permette di rappresentare i punti della griglia corrispondente nel rettangolo $[a, b] \times [c, d]$ in questo modo: l'elemento di coordinate $(X(i, j), Y(i, j))$ è il generico punto di indici i, j sulla griglia. In pratica, l'istruzione `meshgrid` permette di valutare una funzione $f(x, y)$ definita su \mathbb{R}^2 in una griglia di punti senza utilizzare alcun ciclo. Infatti, se voglio ad esempio valutare la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ nei punti di una griglia nel rettangolo $[-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$ basta dare i seguenti comandi:

```
octave:6> x = -0.5:0.02:.5;
octave:7> y = x;
octave:8> [X, Y] = meshgrid(x, y);
octave:9> A = X.^2 + Y.^2;
```

La variabile `A` contiene i valori della funzione $f(x, y)$ sulla griglia del rettangolo $[-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$ discretizzato mediante i vettori `x` e `y`.

Per visualizzare l'immagine possiamo dare il comando

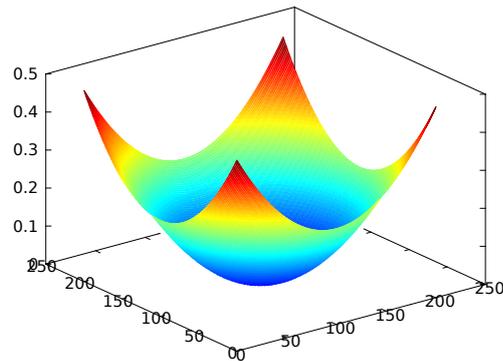
```
octave:10> imagesc(A);
```



che produce

Se invece vogliamo visualizzare il grafico in \mathbb{R}^3 diamo il comando

```
octave:11> mesh(A);
```



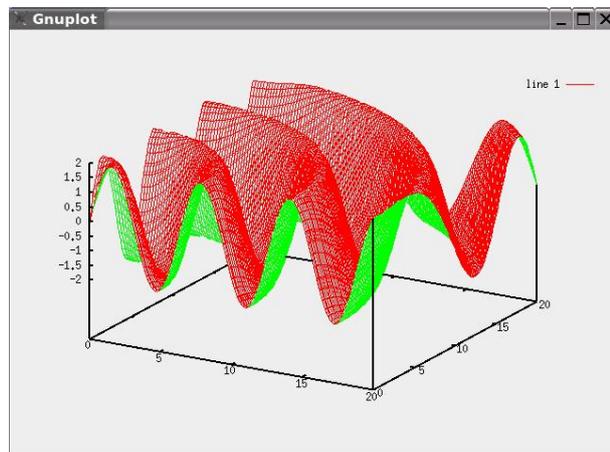
che produce

Provare a usare `meshc`, `contour`, `surf`, `surfc` al posto di `mesh`.

Esercizio 1. Utilizzando le function `meshgrid` e `mesh` si disegni il grafico delle seguenti funzioni:

1. $f(x, y) = 2 \sin((x^2 + y^2)^{1/2})$, $(x, y) \in [0 \ 20] \times [0 \ 20]$
2. $f(x, y) = (x^2/2 + y^2/3)/2$, $(x, y) \in [-a \ a] \times [-b \ b]$, con $a, b > 0$ scelti a piacere
3. $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$, $(x, y) \in [-a \ a] \times [-b \ b]$, con $a, b > 0$ scelti a piacere
4. $f(x, y) = xe^{-(x-y^2)^2-y^2}$, $(x, y) \in [-a \ a] \times [-b \ b]$, con $a, b > 0$ scelti a piacere.

Per la prima funzione dovrete ottenere la figura



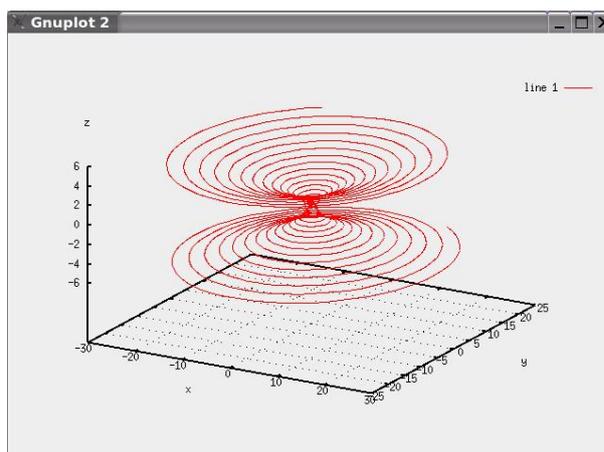
2 Curve parametriche

Le seguenti equazioni parametrizzano una curva in \mathbb{R}^3 di coordinate $(x(t), y(t), z(t))$:

$$\begin{aligned}x(t) &= (1 + t^2) \sin(20t), \\y(t) &= (1 + t^2) \cos(20t), \\z(t) &= t, \quad t \in [-5, 5].\end{aligned}$$

La curva può essere disegnata usando il comando `plot3`

```
octave:17> t = [-5:0.01:5];
octave:18> x = (1 + t.^2) .* cos(20*t);
octave:19> y = (1 + t.^2) .* sin(20*t);
octave:20> z = t;
octave:21> plot3(x, y, z)
```



che produce l'immagine

Esercizio 2. 1. Disegnare una spirale con raggio costante.

2. Disegnare le curve $(x(t), y(t), z(t))$ dove:

(a) $x(t) = (2 + \cos(1.5t)) \cos(t)$, $y(t) = (2 + \cos(1.5t)) \sin(t)$, $z(t) = 2 \sin(1.5t)$, con $t \in [0, 4\pi]$.

- (b) $x(t) = (4 + \sin(20t)) \cos(t)$, $y(t) = (4 + \sin(20t)) \sin(t)$, $z(t) = \cos(20t)$,
con $t \in [0, 2\pi]$.
- (c) $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $z(t) = t^3$, con $t \in [-2, 2]$.

3 Superfici parametriche

Vogliamo disegnare la superficie definita dalle equazioni parametriche

$$\begin{aligned}x(r, t) &= r \cos(t) \\y(r, t) &= r \sin(t) \\z(r, t) &= r,\end{aligned}$$

dove $r \in [0, 1]$, $t \in [0, 2\pi]$. Per far questo diamo i comandi:

```
octave:1> r=linspace(0,1,30);
octave:2> t=linspace(0,2*pi,30);
octave:3> [R,T]=meshgrid(r,t);
octave:4> x=R.*cos(T);
octave:5> y=R.*sin(T);
octave:6> z=R;
octave:7> mesh(x,y,z)
```

Perché otteniamo un cono? Provare a usare il comando `surf`, poi `shading interp` e `axis off`.

Esercizio 3. Disegnare una sfera. Dare il comando `axis('equal')` per avere stesse proporzioni sui tre assi coordinati.

Esercizio 4. Disegnare la superficie definita dalle equazioni parametriche

$$\begin{aligned}x(u, v) &= 2(1 - e^{u/(6\pi)}) \cos(u) \cos^2(v/2) \\y(u, v) &= 2(-1 + e^{u/(6\pi)}) \sin(u) \cos^2(v/2) \\z(u, v) &= 1 - e^{u/(3\pi)} - \sin(v) + e^{u/(6\pi)} \sin(v),\end{aligned}$$

dove $u \in [0, 6\pi]$, $v \in [0, 2\pi]$. Ottenete una conchiglia?

Cercate sul web le definizioni delle superfici parametriche “Klein bottle”, “Enneper’s surface”, “Ellipsoid”, “Hyperboloid of two sheets”, “Lissajous surface”, “Whitney umbrella”, “Steiner surface”, e disegnatele.

4 Esercizi da inviare al docente

Inviare i comandi che sono stati dati per svolgere i seguenti esercizi:

Esercizio 5. Disegnare il grafico della funzione $f(x, y) = \left| \frac{1}{1 - (x + iy)^{40}} \right|$ dove i è l’unità immaginaria e $(x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]$.

Esercizio 6. Disegnare la curva in \mathbb{R}^3 data da: $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \sin(2t)$, $z(t) = \sin(3t)$, con $t \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 7. Disegnare la striscia di Moebius, sapendo che è descritta dalle equazioni parametriche

$$\begin{aligned}x(u, v) &= \cos(u) + v \cos(u/2) \cos(u) \\y(u, v) &= \sin(u) + v \cos(u/2) \sin(u) \\z(u, v) &= v \sin(u/2),\end{aligned}$$

con $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [-0.4, 0.4]$.