

# Laboratorio didattico di matematica computazionale

Beatrice Meini

Lezione 10 - 25/5/2011

## 1 Problemi ai valori iniziali

Ci poniamo il problema di calcolare la soluzione  $x(t)$  (assumendo che esista e sia unica) del problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), t), & t \in [a, b] \\ x(a) = c \end{cases}$$

dove  $f(x, t) : R^m \times R \rightarrow R^m$  è una funzione assegnata e  $c$  è un vettore di dimensione  $m$  assegnato.

La funzione `lsode` approssima la soluzione  $x(t)$  in un numero finito di punti dell'intervallo  $[a, b]$ . L'utilizzo più semplice procede secondo i seguenti passi (si veda anche l'help):

1. Definire una function `z=miat(x,t)` che calcola  $z = f(x, t)$ , dove  $f(x, t)$  è la funzione che definisce l'equazione differenziale  $x'(t) = f(x(t), t)$
2. Definire un vettore `T` che contiene una discretizzazione dell'intervallo  $[a, b]$ , ad esempio `T=linspace(a,b,50)`.
3. Definire un vettore `c` che contiene  $x(a)$ .
4. Eseguire il comando `x = lsode('miat', c, T)`. In output la variabile `x` contiene l'approssimazione della soluzione  $x(t)$  calcolata negli elementi del vettore `T`.

Per esempio, per risolvere il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t), & t \in [0, 2\pi] \\ x_2'(t) = -x_1(t) \\ x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

definisco la function

```
function z=esempio(x,t)
    z = [ x(2); -x(1)];
endfunction
```

ed eseguo i comandi

```
octave:2> T=linspace(0,2*pi,50);
octave:3> c=[ 1; 0];
octave:4> x=lsode("esempio",c,T);
```

La variabile  $\mathbf{x}$ , di dimensione  $50 \times 2$ , contiene nella prima colonna le approssimazioni di  $x_1(t)$  e nella seconda colonna le approssimazioni di  $x_2(t)$ .

La soluzione del problema è  $x_1(t) = \cos(t)$ ,  $x_2(t) = -\sin(t)$ . Questo si può verificare:

```
octave:12> err=max(abs((x-[cos(T)',-sin(T)'])))
err =
1.1088e-06 8.6331e-07
```

Per visualizzare la soluzione si possono dare i comandi

```
octave:13> plot(x(:,1),x(:,2))
octave:14> axis("square")
```

e

```
octave:15> plot(T,x(:,1),T,x(:,2))
```

*Esercizio 1.* Si risolva il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2^3(t), & t \in [0, 8] \\ x_2'(t) = -x_1^3(t) \\ x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

Si disegni il grafico di  $x_1(t)$ , di  $x_2(t)$  e la curva  $(x_1(t), x_2(t))$ . Si facciano le stesse cose per il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2^5(t), & t \in [0, 8] \\ x_2'(t) = -x_1^5(t) \\ x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

Cosa succede per l'equazione  $x_1'(t) = x_2^2(t)$ ,  $x_2'(t) = -x_1^2(t)$ ?

*Esercizio 2.* L'equazione del pendolo semplice ha la forma

$$\theta''(t) + \sin(\theta(t)) = 0$$

dove  $\theta(t)$  è l'angolo formato dall'asta del pendolo con la verticale.

1. Si riscriva l'equazione del pendolo in una equazione del tipo  $x'(t) = f(x(t), t)$ , dove  $f(x, t) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ .
2. Si approssimi la soluzione del problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} \theta''(t) + \sin(\theta(t)) = 0, & t \in [0, 10] \\ \theta(0) = 1 \\ \theta'(0) = 1 \end{cases}$$

mediante la funzione `lsode`, e si disegni il grafico di  $\theta(t)$ ; si modifichino a piacere le condizioni iniziali e l'intervallo.

3. Nel caso di moto smorzato del pendolo, l'equazione diventa

$$\theta''(t) + \sin(\theta(t)) + s\theta'(t) = 0$$

dove  $s$  è una costante positiva che dipende dalle caratteristiche del pendolo e dalla forza smorzante. Si risolva il problema ai valori iniziali, assegnando un valore a  $s$  e alle condizioni iniziali, e si disegni il grafico di  $\theta(t)$ .

*Esercizio 3* (Attrattore di Lorenz). Si risolva il seguente problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} x_1'(t) = 10(x_2(t) - x_1(t)) \\ x_2'(t) = 28x_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t), & t \in [0, 50] \\ x_3'(t) = x_1(t)x_2(t) - 8x_3(t)/3 \\ x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1 \\ x_3(0) = 0 \end{cases}$$

suddividendo l'intervallo  $[0, 50]$  in 1000 punti. Si disegni la curva  $(x_1(t), x_3(t))$ ,  $t \in [0, 100]$ .