Complessità di varietà triangolabili.

Bruno Martelli

10 aprile 2008

Definizione di poliedro

La categoria dei *poliedri compatti* può essere definita in vari modi equivalenti.

Definizione

Un poliedro compatto è

- Un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$ localmente conico. I morfismi sono funzioni lineari a tratti.

Definizione di poliedro

La categoria dei *poliedri compatti* può essere definita in vari modi equivalenti.

Definizione

Un poliedro compatto è

- Un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$ localmente conico. I morfismi sono funzioni lineari a tratti.
- Uno schema simpliciale astratto, visto a meno di suddivisioni. I morfismi sono funzioni sul supporto che sono simpliciali in una qualche suddivisione.

La descrizione di un poliedro come schema simpliciale è una *triangolazione*.

Varietà

Una *varietà PL* (= lineare a tratti) è un poliedro in cui ogni punto ha un intorno (PL)-omeomorfo ad un intorno di un punto in $\mathbb{R}^n$.
Fatti generali:

- Una varietà C^∞ ha una (unica) struttura di varietà PL, la quale ha un'unica struttura di varietà topologica.

Varietà

Una *varietà PL* (= lineare a tratti) è un poliedro in cui ogni punto ha un intorno (PL)-omeomorfo ad un intorno di un punto in $\mathbb{R}^n$.
Fatti generali:

- Una varietà C^∞ ha una (unica) struttura di varietà PL, la quale ha un'unica struttura di varietà topologica.
- Le categorie C^∞, PL e Top coincidono per le varietà di dimensione $\leqslant 3$.

Varietà

Una *varietà PL* (= lineare a tratti) è un poliedro in cui ogni punto ha un intorno (PL)-omeomorfo ad un intorno di un punto in $\mathbb{R}^n$.
Fatti generali:

- Una varietà C^∞ ha una (unica) struttura di varietà PL, la quale ha un'unica struttura di varietà topologica.
- Le categorie C^∞, PL e Top coincidono per le varietà di dimensione $\leqslant 3$.
- Le categorie C^∞ e PL coincidono per 4-varietà ma differiscono molto dalla categoria Top.

Varietà

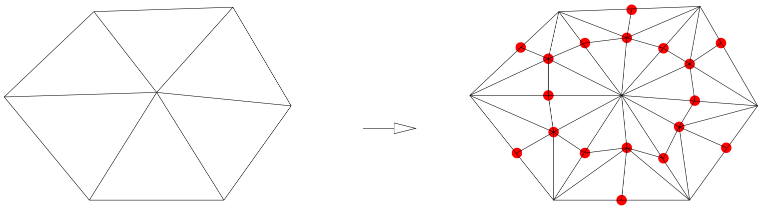
Una *varietà PL* (= lineare a tratti) è un poliedro in cui ogni punto ha un intorno (PL)-omeomorfo ad un intorno di un punto in $\mathbb{R}^n$.

Fatti generali:

- Una varietà C^∞ ha una (unica) struttura di varietà PL, la quale ha un'unica struttura di varietà topologica.
- Le categorie C^∞, PL e Top coincidono per le varietà di dimensione $\leqslant 3$.
- Le categorie C^∞ e PL coincidono per 4-varietà ma differiscono molto dalla categoria Top.
- Le categorie C^∞ e PL non coincidono in dimensione $\geqslant 7$.

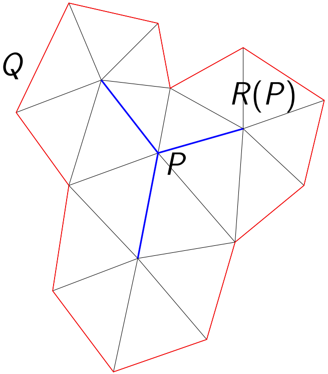
Suddivisione baricentrica

Una *suddivisione baricentrica* di una triangolazione dipende dalla scelta di un nuovo vertice all'interno di ogni simplesso.



Intorno regolare

Uno strumento potente della categoria PL è la nozione di *intorno regolare*.
Dati due poliedri $P \subset Q$, e T una triangolazione della coppia (Q, P), l'intorno regolare $R(P) \subset Q$ è la chiusura dell'unione dei simplessi che intersecano P. Il bordo $\partial R(P)$ è l'unione dei simplessi di $R(P)$ che non intersecano P.



Unicitá dell'intorno regolare

Teorema

Se T è sufficientemente fine, $R(P)$ dipende solo da P a meno di isotopia. Inoltre:

- $R(P) \setminus P \cong \partial R(P) \times (0, 1]$.

Per ottenere una triangolazione fine, basta prendere una triangolazione T di (Q, P) ed effettuare due suddivisioni baricentriche T''.

Unicitá dell'intorno regolare

Teorema

Se T è sufficientemente fine, $R(P)$ dipende solo da P a meno di isotopia. Inoltre:

- $R(P) \setminus P \cong \partial R(P) \times (0, 1]$.
- *Se $Q = M$ è una varietà, $R(P)$ è una sottovarietà con bordo $\partial R(P)$.*

Per ottenere una triangolazione fine, basta prendere una triangolazione T di (Q, P) ed effettuare due suddivisioni baricentriche T''.

Star e link di un punto

L'intorno regolare di un punto x è la *stella* di x in Q. Il *link* di x è il bordo $\partial R(x)$ della stella. Localmente, ogni punto è un cono sul suo link.

Un poliedro Q è una varietà se e solo se ogni stella è omeomorfa a $I^n = [0,1]^n =: D^n$, cioè ogni link è omeomorfo a $S^{n-1} := \partial D^n$.

Altri strumenti

Altri strumenti a disposizione nella categoria PL:

- Decomposizione in manici.

Altri strumenti

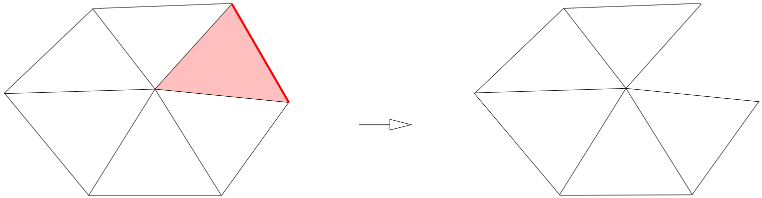
Altri strumenti a disposizione nella categoria PL:

- Decomposizione in manici.
- Collare del bordo di una varietà.

Altri strumenti

Altri strumenti a disposizione nella categoria PL:

- Decomposizione in manici.
- Collare del bordo di una varietà.
- L'operazione di *collassamento*.



No controllo C^1

L'assenza di controllo sulle derivate può rendere le cose più difficili. Dove fare attenzione:

- Una sottovarietà $N \subset M$ è *localmente piatta* se $N \subset M$ è intorno a x come un sottospazio lineare in $\mathbb{R}^n$. Altrimenti è *annodata*. Esempi di varietà annodate si costruiscono come coni su nodi $S^1 \subset S^3$ e più in generale $S^{n-3} \subset S^{n-1}$.

No controllo C^1

L'assenza di controllo sulle derivate può rendere le cose più difficili. Dove fare attenzione:

- Una sottovarietà $N \subset M$ è *localmente piatta* se $N \subset M$ è intorno a x come un sottospazio lineare in $\mathbb{R}^n$. Altrimenti è *annodata*. Esempi di varietà annodate si costruiscono come coni su nodi $S^1 \subset S^3$ e più in generale $S^{n-3} \subset S^{n-1}$.
- L'intorno regolare di una sottovarietà (anche piatta) non ha una struttura ovvia di fibrato, anche se è localmente piatto. In generale, i fibrati sono oggetti più complicati nella categoria PL.

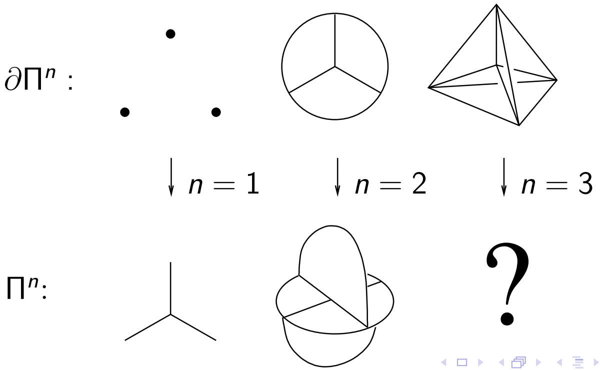
No controllo C^1

L'assenza di controllo sulle derivate può rendere le cose più difficili. Dove fare attenzione:

- Una sottovarietà $N \subset M$ è *localmente piatta* se $N \subset M$ è intorno a x come un sottospazio lineare in $\mathbb{R}^n$. Altrimenti è *annodata*. Esempi di varietà annodate si costruiscono come coni su nodi $S^1 \subset S^3$ e più in generale $S^{n-3} \subset S^{n-1}$.
- L'intorno regolare di una sottovarietà (anche piatta) non ha una struttura ovvia di fibrato, anche se è localmente piatto. In generale, i fibrati sono oggetti più complicati nella categoria PL.
- La trasversalità fra sottovarietà (anche piatte) per funzionare efficacemente deve essere definita globalmente. Le mappe trasverse non formano un aperto.

Modello locale

Sia Π^n il cono sul $(n-1)$-scheletro del simplesso $(n+1)$-dimensionale. La base del cono è $\partial\Pi^n$ e indichiamo con $\mathrm{Int}(\Pi^n)$ la parte interna.



Poliedro semplice

Definizione

Un *poliedro semplice* P è un poliedro mdellato localmente su $\mathrm{int}(\Pi^n)$. In altre parole, è coperto da un numero finito di aperti omeomorfi ad aperti di $\mathrm{int}(\Pi^n)$.

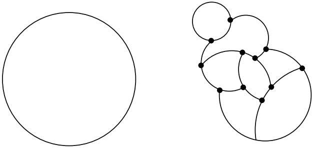
Poliedro semplice

Definizione

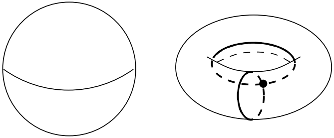
Un *poliedro semplice* P è un poliedro mdellato localmente su $\mathrm{int}(\Pi^n)$. In altre parole, è coperto da un numero finito di aperti omeomorfi ad aperti di $\mathrm{int}(\Pi^n)$.

La stratificazione naturale di Π^n induce una stratificazione di P. Lo 0-strato consiste di punti isolati, detti *vertici*. Alcuni poliedri semplici di dimensione $n = 1$ e $n = 2$:

$n = 1$:



$n = 2$:



Localmente non annodato

Tipicamente in geometria PL, è necessario richiedere una volta per tutte che gli oggetti siano localmente non annodati.

Definizione

Un poliedro semplice $P^{n-1} \subset \mathrm{int}(M^n)$ è *localmente non annodato* se localmente $P \subset M$ è come $\Pi^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

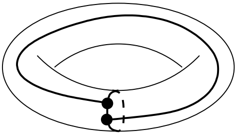
Spina

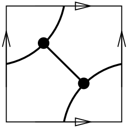
Un poliedro $P \subset \mathrm{int}(M)$ è una *spina* se il complementare è fatto di collari aperti e di palle aperte. Più rigorosamente:

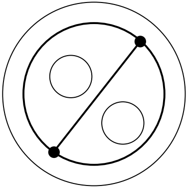
Definizione

$P \subset \mathrm{int}(M)$ è una spina se esistono dei dischi disgiunti $D_1, \ldots, D_k \subset \mathrm{int}(M)$ tali che $M \setminus \mathrm{int}(D_1 \cup \ldots \cup D_k)$ collassa su P.

Ogni varietà compatta M ha una spina semplice (Matveev).







Complessità

Definizione

La *complessità* $c(M)$ è il minimo numero di vertici di una spina semplice di M.

Esempi:

- L'equatore $S^{n-1} \subset S^n$ è una spina semplice senza vertici per $n \geqslant 2$. Quindi $c(S^n) = 0$ per $n \geqslant 2$. D'altra parte, $c(S^1) = 1$.

Complessità

Definizione

La *complessità* $c(M)$ è il minimo numero di vertici di una spina semplice di M.

Esempi:

- L'equatore $S^{n-1} \subset S^n$ è una spina semplice senza vertici per $n \geqslant 2$. Quindi $c(S^n) = 0$ per $n \geqslant 2$. D'altra parte, $c(S^1) = 1$.
- Un iperpiano $\mathbb{RP}^{n-1} \subset \mathbb{RP}^n$ è una spina semplice senza vertici. Anche $c(\mathbb{RP}^n) = 0$ per $n \geqslant 2$.

Complessità

Definizione

La *complessità* $c(M)$ è il minimo numero di vertici di una spina semplice di M.

Esempi:

- L'equatore $S^{n-1} \subset S^n$ è una spina semplice senza vertici per $n \geqslant 2$. Quindi $c(S^n) = 0$ per $n \geqslant 2$. D'altra parte, $c(S^1) = 1$.
- Un iperpiano $\mathbb{RP}^{n-1} \subset \mathbb{RP}^n$ è una spina semplice senza vertici. Anche $c(\mathbb{RP}^n) = 0$ per $n \geqslant 2$.
- Incollando tre tori solidi per il bordo è possibile costruire una spina semplice per $\mathbb{CP}^2$. Quindi $c(\mathbb{CP}^2) = 0$.

Superfici

La complessità di una superficie chiusa è

- $c(S^2) = 0$,

Superfici

La complessità di una superficie chiusa è

- $c(S^2) = 0$,
- $c(\Sigma) = 2|\chi(\Sigma)| + 2$.

In particolare, $c(S^1 \times S^1) = 2$. Anello e nastro di Möbius hanno complessità zero.

Proprietà

In dimensione 3 valgono i fatti seguenti, dimostrati da Matveev:

- $c(M\#M') = c(M) + c(M')$.

Proprietà

In dimensione 3 valgono i fatti seguenti, dimostrati da Matveev:

- $c(M\#M') = c(M) + c(M')$.
- Per ogni n esiste un numero finito di 3-varietà chiuse irriducibili (oppure non-chiuse ma iperboliche) con complessità n.

Proprietà

In dimensione 3 valgono i fatti seguenti, dimostrati da Matveev:

- $c(M\#M') = c(M) + c(M')$.
- Per ogni n esiste un numero finito di 3-varietà chiuse irriducibili (oppure non-chiuse ma iperboliche) con complessità n.
- Se M_F è ottenuta tagliando M lungo una superficie incompressibile F allora $c(M_F) \leqslant c(M)$.

Censo chiuse orientabili (Matveev, Martelli-Petronio)

c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
lenticolari	3	2	3	6	10	20	36	72	136	272	528
ellittiche	.	.	1	1	4	11	25	45	78	142	270
piatte	.	.	.	.	.	.	6	.	.	.	.
Nil	.	.	.	.	.	.	7	10	14	15	15
$\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$	.	.	.	.	.	.	.	39	162	513	1416
Sol	.	.	.	.	.	.	.	5	9	23	39
$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	.	.	.	.	.	.	.	.	2	.	8
iperboliche	.	.	.	.	.	.	.	.	.	4	25
non geom	.	.	.	.	.	.	.	4	35	185	777
totale	**3**	**2**	**4**	**7**	**14**	**31**	**74**	**175**	**436**	**1154**	**3078**

Censo iperboliche orientabili

Con cuspidi (Callahan-Hildebrand-Weeks):

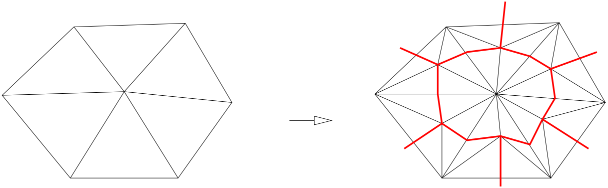
	0	1	2	3	4	5	6	7
T	.	.	2	9	52	223	913	3388
T, T	.	.	.	.	4	11	48	162
T, T, T	.	.	.	.	.	.	1	2
totale	.	.	**2**	**9**	**56**	**234**	**962**	**3552**

Con bordo geodetico Σ_g (Fuji, Frigerio-Martelli-Petronio):

	0	1	2	3	4
Σ_2	.	.	8	76	628
Σ_3	.	.	.	74	2034
Σ_4	.	.	.	.	2340
totale	.	.	**8**	**151**	**5033**

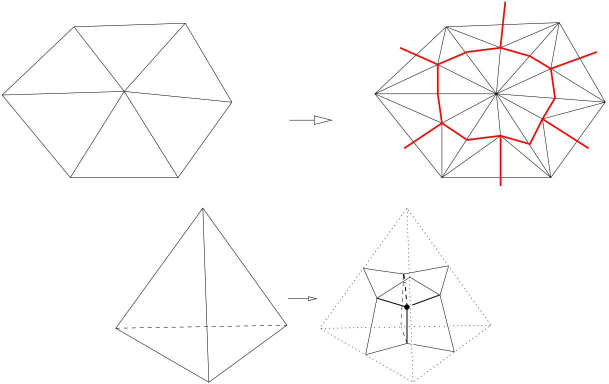
Spine e triangolazioni

Data una triangolazione di una varietà chiusa M con t tetraedri, è possibile costruire una spina semplice di M con t vertici.



Spine e triangolazioni

Data una triangolazione di una varietà chiusa M con t tetraedri, è possibile costruire una spina semplice di M con t vertici.



Manici

Vale il lemma seguente.

Lemma

Sia $n \geqslant 3$ e N^n ottenuta da M^n attaccando un i-manico.

1. *Se $i = n$, allora $c(N) = c(M)$.*

Manici

Vale il lemma seguente.

Lemma

Sia $n \geqslant 3$ e N^n ottenuta da M^n attaccando un i-manico.

1. *Se $i = n$, allora $c(N) = c(M)$.*
2. *Se $i = n - 1$ e $n \geqslant 4$, allora $c(N) \geqslant c(M)$.*

Manici

Vale il lemma seguente.

Lemma

Sia $n \geqslant 3$ e N^n ottenuta da M^n attaccando un i-manico.

1. *Se $i = n$, allora $c(N) = c(M)$.*
2. *Se $i = n - 1$ e $n \geqslant 4$, allora $c(N) \geqslant c(M)$.*
3. *Se $i < n - 1$, allora $c(N) \leqslant c(M)$.*

Manici

Vale il lemma seguente.

Lemma

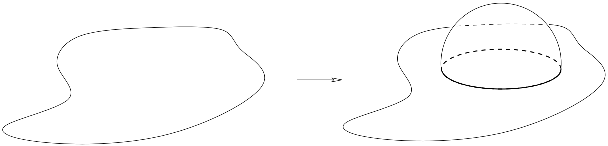
Sia $n \geqslant 3$ e N^n ottenuta da M^n attaccando un i-manico.

1. *Se $i = n$, allora $c(N) = c(M)$.*
2. *Se $i = n - 1$ e $n \geqslant 4$, allora $c(N) \geqslant c(M)$.*
3. *Se $i < n - 1$, allora $c(N) \leqslant c(M)$.*

In particolare, una varietà che si decompone senza $(n-1)$-manici ha complessità zero. Ad esempio, $c(\mathbb{CP}^n) = 0$ per ogni n. Molte 4-varietà semplicemente connesse (tutte?) hanno $c = 0$.

Caso $i = n$

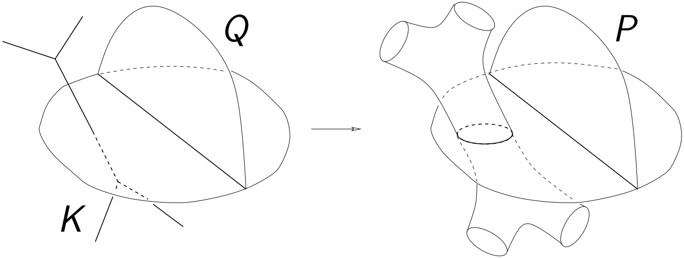
Attaccare un n-manico consiste nel tappare una componente di bordo omeomorfa a S^{n-1}. Una spina per M è quindi spina anche per N. D'altra parte, da una spina per N se ne costruisce una per M con la mossa seguente



che non aggiunge vertici.

Creazione di bolle più generali

Sia $Q^{n-1} \subset M^n$ un poliedro semplice in una varietà. Sia $K \subset \mathrm{int}(M)$ un sottopoliedro qualsiasi. Aggiungere a Q una *bolla* intorno a K consiste nella rimozione di un piccolo intorno regolare di K e nell'aggiunta del suo bordo.



Effetto delle bolle

Per definire P rigorosamente basta prendere una triangolazione T di (M, Q, K) e usare l'intorno regolare di K in T''. Vale il lemma seguente.

Lemma

Il poliedro P è semplice. Se K non interseca l'1-scheletro di Q, allora P ha gli stessi vertici di Q.

Spine con porzioni di dimensione inferiore

Con le bolle si dimostra il fatto seguente.

Proposizione

Se M^n ha una spina $P = Q \cup K$ con Q semplice avente t vertici e $\dim K < n - 1$ allora $c(M^n) \leqslant t$.

Spine con porzioni di dimensione inferiore

Con le bolle si dimostra il fatto seguente.

Proposizione

Se M^n ha una spina $P = Q \cup K$ con Q semplice avente t vertici e $\dim K < n-1$ allora $c(M^n) \leqslant t$.

Dimostrazione.

Sia T triangolazione di (M, Q, K). Induttivamente su ogni simplesso σ di K non in Q: perturbare σ in modo che non intersechi l'1-scheletro di Q (si può fare perché $\dim \sigma < n-1$), e creare una bolla intorno a σ. $\square$

Caso $i < n - 1$

La varietà N è ottenuta attaccando un i-manico da M. Se P è spina di M, allora $P \cup D^i$ è una spina di N, dove D^i è il cuore del manico. La proposizione precedente implica che $c(N) \leqslant c(M)$.

Caso $i < n - 1$

La varietà N è ottenuta attaccando un i-manico da M. Se P è spina di M, allora $P \cup D^i$ è una spina di N, dove D^i è il cuore del manico. La proposizione precedente implica che $c(N) \leqslant c(M)$.

Resta il caso $i = n - 1$: si deve mostrare che $c(N) \geqslant c(M)$. Invertiamo: M è ottenuta da N scavando lungo un arco propriamente immerso (il co-cuore del manico). Mostriamo quindi che scavare lungo archi in dimensione $n \geqslant 4$ non aumenta la complessità.

Curve

Data una curva semplice propriamente immersa $\gamma \subset M$, la varietà ottenuta *scavando* lungo γ è $M_\gamma = M \setminus \mathrm{int}(R(\gamma))$.

Curve

Data una curva semplice propriamente immersa $\gamma \subset M$, la varietà ottenuta *scavando* lungo γ è $M_\gamma = M \setminus \mathrm{int}(R(\gamma))$.

Teorema

Sia M^n una varietà compatta.

1. *Se $n \geqslant 4$, per ogni curva semplice propriamente immersa vale $c(M^n_\gamma) \leqslant c(M^n)$.*
2. *Se $c(M^n) > 0$, esiste una $\gamma \subset M^n$ tale che $c(M^n_\gamma) < c(M^n)$.*

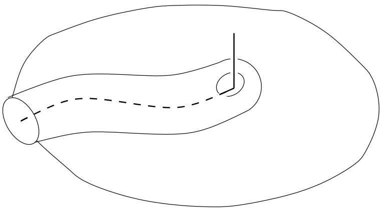
Dimostrazione

Verifichiamo il primo punto. Sia P spina minimale di M. Se la curva è chiusa, con una isotopia si sposta dentro γ. Poiché $n \geqslant 4$, si fa in modo che non tocchi l'1-scheletro di P. Con una bolla intorno a γ si costruisce la spina per M_γ.

Dimostrazione

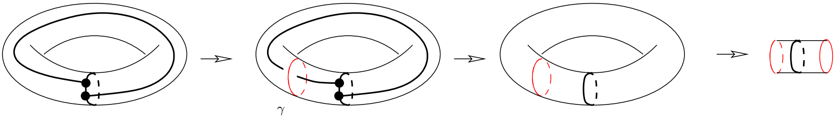
Verifichiamo il primo punto. Sia P spina minimale di M. Se la curva è chiusa, con una isotopia si sposta dentro γ. Poiché $n \geqslant 4$, si fa in modo che non tocchi l'1-scheletro di P. Con una bolla intorno a γ si costruisce la spina per M_γ.

Se γ non è chiusa, procediamo analogamente tenendo le due estremità come in figura e facendo un buco.
Quindi collassiamo: il numero di vertici non sale mai.



Dimostrazione

Nel secondo punto, si prende una spina minimale P. Questa ha almeno un vertice perché $c(M) > 0$. Si prende uno degli $(n-1)$-strati adiacenti al vertice e si buca. Si collassa quindi il rimanente dello strato: tutti i vertici adiacenti non esistono più, quindi la nuova spina ha meno vertici.
La nuova spina è ancora una spina di M (impossibile) oppure è una spina di M_γ per una γ, che quindi ha $c(M_\gamma) < c(M)$.



Chirurgia

Una *chirurgia* intorno ad una curva semplice chiusa $\gamma \subset \mathrm{int}(M)$ può essere effettuata se il suo intorno regolare è omeomorfo a $S^1 \times D^{n-1}$, e consiste nello scavare lungo γ e successivamente incollare $D^2 \times S^{n-2}$ sul nuovo bordo omeomorfo a $S^1 \times S^{n-2}$ tramite una qualche mappa.

Corollario

Sia M^n una varietà compatta di dimensione $n \geqslant 4$ e N^n ottenuta da M^n tramite chirurgia. Allora $c(N^n) \leqslant c(M^n)$. Inoltre se M^n è chiusa con $c(M^n) > 0$ allora esiste una N^n con $c(N^n) < c(M^n)$.

Dimostrazione.

Una chirurgia consiste in 1) scavare lungo γ e 2) attaccare un 2-manico e un n-manico.

Varietà semplicemente connesse

Per $n = 2, 3$, ogni M semplicemente connessa ha $c(M) = 0$ (Perelman).

Corollario

Se M^n è chiusa e semplicemente connessa con $n \geqslant 4$ e $c(M^n) > 0$, allora

$$c(M^n \# S^2 \times S^{n-2}) < c(M^n).$$

Somma connessa

Proposizione

Se $n \geqslant 3$ vale la disuguaglianza

$$c(M\#M') \leqslant c(M) + c(M').$$

Dimostrazione.

Una somma connessa consiste nella rimozione di due n-manici, nell'aggiunta di un 1-manico e di un n-manico. $\square$

Problema

Trovare esempi in cui non vale l'uguaglianza.

Rivestimenti

Vale il risultato seguente.

Proposizione

Sia $p : M \to N$ un rivestimento di grado d. Allora

$$c(M) \leqslant d \cdot c(N).$$

Dimostrazione.

Una spina semplice con k vertici di M si solleva ad una spina semplice di N con dk vertici. $\square$

Prodotti

Vale il risultato seguente.

Teorema

Siano M^m, N^n compatte di dimensione $m, n \geqslant 1$. Se M ha bordo oppure ha una decomposizione senza $(m-1)$-manici, allora

$$c(M^m \times N^n) = 0.$$

In particolare, $c(S^m \times N^n) = 0$ per ogni $m \geqslant 2$.

Dimostrazione.

Se M ha bordo, sia P una spina. Allora $P \times N$ è una spina senza vertici per $M \times N$. $\square$

Gruppi residualmente finiti

Un gruppo G è residualmente finito se vale una delle condizioni equivalenti:

- Per ogni elemento $g \in G$ non banale esiste un sottogruppo di indice finito che non contiene g
- Per ogni elemento $g \in G$ non banale esiste un sottogruppo normale di indice finito che non contiene g
- Per ogni elemento $g \in G$ esiste un omomorfismo $\phi : G \to H$ a valori in un gruppo finito con $\phi(g) \neq e$.
- L'intersezione di tutti i sottogruppi di indice finito è $\{e\}$.
- L'intersezione di tutti i sotogruppi normali di indice finito è $\{e\}$.

Sono residualmente finiti:

- I gruppi finiti
- I gruppi liberi
- I gruppi abeliani
- I gruppi nilpotenti finitamente generati
- I gruppi fondamentali di varietà a curvatura costante
- I gruppi fondamentali di 3-varietà (Perelman)

Norma di Gromov

Sia X spazio topologico. La *norma* $||\alpha||$ di un ciclo $\alpha \in H_*(X, \mathbb{R})$ è l'inf della quantità

$$|a_1| + \ldots + |a_k|$$

al variare delle rappresentazioni di α come catena

$$\alpha = a_1\sigma_1 + \ldots + a_k\sigma_k.$$

Si tratta in verità di una *seminorma*. Se X è una varietà orientabile, ha una classe fondamentale $[X] \in H_n(X, \mathbb{Z}) \subset H_n(X, \mathbb{R})$ e la *norma di Gromov* $||M||$ di M è definita come $||[X]||$.

Proprietà della norma di Gromov

- $||M\#M'|| = ||M|| + ||M'||$.

Proprietà della norma di Gromov

- $||M\#M'|| = ||M|| + ||M'||$.
- Se $M \to N$ è un rivestimento di grado d, allora $||M|| = d||N||$.

Proprietà della norma di Gromov

- $||M\#M'|| = ||M|| + ||M'||$.
- Se $M \to N$ è un rivestimento di grado d, allora $||M|| = d||N||$.
- Una varietà riemanniana M con curvatura sezionale negativa ha $||M|| > 0$.

Proprietà della norma di Gromov

- $||M\#M'|| = ||M|| + ||M'||$.
- Se $M \to N$ è un rivestimento di grado d, allora $||M|| = d||N||$.
- Una varietà riemanniana M con curvatura sezionale negativa ha $||M|| > 0$.
- Se $\pi_1(M)$ è finito, $||M|| = 0$.

Proprietà della norma di Gromov

- $||M\#M'|| = ||M|| + ||M'||$.
- Se $M \to N$ è un rivestimento di grado d, allora $||M|| = d||N||$.
- Una varietà riemanniana M con curvatura sezionale negativa ha $||M|| > 0$.
- Se $\pi_1(M)$ è finito, $||M|| = 0$.
- $||M \times S^n|| = 0$ per ogni $n \geqslant 1$.

Triangolazioni e norma di Gromov

Sia $t(M)$ il minimo numero di simplessi in una triangolazione di M.
Sia $||M||$ la norma di Gromov di M.

Teorema

Sia M una varietà chiusa con $\pi_1(M)$ residualmente finito. Vale la relazione

$$||M|| \leqslant c(M) \leqslant t(M).$$

Per dimostrare questo fatto abbiamo bisogno di alcuni strumenti.

Nervo

Sia $P \subset M$ semplice in una varietà M. Otteniamo una stratificazione di M. Le componenti connesse degli strati (dette *k-componenti*) formano un insieme parzialmente ordinato $(C, \leqslant)$: poniamo $C \leqslant C'$ se $C \subset \overline{C'}$.

Nervo

Sia $P \subset M$ semplice in una varietà M. Otteniamo una stratificazione di M. Le componenti connesse degli strati (dette *k-componenti*) formano un insieme parzialmente ordinato $(C, \leqslant)$: poniamo $C \leqslant C'$ se $C \subset \overline{C'}$.
Un insieme parzialmente ordinato determina sempre un complesso simpliciale: i simplessi sono gli insiemi $\{a_1, \ldots, a_k\}$ di elementi tali che $a_1 < \ldots < a_k$. Quindi a P è associato un complesso simpliciale $\mathcal{N}$, detto *nervo*. Se P è duale a una triangolazione T, il nervo è la suddivisione baricentrica T'.

Nervo

Sia $P \subset M$ semplice in una varietà M. Otteniamo una stratificazione di M. Le componenti connesse degli strati (dette *k-componenti*) formano un insieme parzialmente ordinato $(C, \leqslant)$: poniamo $C \leqslant C'$ se $C \subset \overline{C'}$.

Un insieme parzialmente ordinato determina sempre un complesso simpliciale: i simplessi sono gli insiemi $\{a_1, \ldots, a_k\}$ di elementi tali che $a_1 < \ldots < a_k$. Quindi a P è associato un complesso simpliciale $\mathcal{N}$, detto *nervo*. Se P è duale a una triangolazione T, il nervo è la suddivisione baricentrica T'.

Il nervo è effettivamente nervo di un ricoprimento aperto di M, ottenuto prendendo intorni aperti regolari degli strati, in dimensione crescente.

Poliedri buoni

Seguendo una definizione di Davis, $P \subset M$ è *buono* (*nice*) se ogni $(n-1)$-componente è adiacente a due n-componenti distinte. Se P è buono, le componenti localmente incidenti su una qualsiasi componente sono tutte distinte.

Poliedri buoni

Seguendo una definizione di Davis, $P \subset M$ è *buono* (*nice*) se ogni $(n-1)$-componente è adiacente a due n-componenti distinte. Se P è buono, le componenti localmente incidenti su una qualsiasi componente sono tutte distinte.

Diciamo inoltre che P è *molto buono* se $i_* : \pi_1(C) \to \pi_1(M)$ è banale per ogni n-componente C (componente di $M \setminus P$). Ad esempio, un poliedro duale ad una triangolazione è molto buono.

Proposizione

Se $P \subset M$ è molto buono e M è chiusa, la mappa $i_* : \pi_1(C) \to \pi_1(M)$ è banale per ogni k-componente C.

Dimostrazione.

Sia C' una n-componente adiacente a C. La chiusura $\overline{C'}$ contiene C ed è omotopa a C' (perché è buono). □

Proposizione

Sia $P \subset M$ è molto buono con t vertici e M chiusa orientabile. Allora $\pi_1(M) \to \pi_1(|\mathcal{N}|)$ è un isomorfismo e $||M|| \leqslant t$.

Dimostrazione.

L'isomorfismo sul π_1 segue dalla proposizione precedente. Per il Mapping Theorem di Gromov, questo implica che

$$||M|| = ||[M]|| = ||f_*([M])||.$$

Poiché P è buono, il nervo consta di $(n+1)! \cdot t$ simplessi, incollati a coppie lungo le facce come in una pseudovarietà. Intorno ad ogni vertice ci sono $(n+1)!$ simplessi incollati come in una decomposizione baricentrica: possono quindi essere sostituiti con un solo simplesso. La classe fondamentale $f_*([M])$ può quindi essere rappresentata da t simplessi con segno ± 1, e quindi

$$||f_*([M])|| = ||[\mathcal{N}]|| \leqslant t.$$

Una spina minimale non è però mai molto buona se $c > 0$. Si può rimediare virtualmente:

Lemma

Sia M chiusa con $\pi_1(M)$ residualmente finito. Esiste $P \subset M$ con $\leqslant c(M)$ vertici che si solleva ad un $\widetilde{P} \subset \widetilde{M}$ molto buono in un ricoprimento finito.

Dimostrazione.

Prendo P minimale. Prendo $Q \subset P$ sottopoliedro semplice più piccolo possibile avente $M \setminus Q$ connesso con immagine banale in $\pi_1(M)$.

Ogni curva γ che interseca trasversalmente P in un punto è non banale (altrimenti buco e trovo sottopoliedro ancora più piccolo).

Prendo un rivestimento che apre tutte queste curve. □

Dimostrazione della disuguaglianza $||M|| \leqslant c(M)$

Dimostrazione.

Per il lemma precedente esiste $P \subset M$ con $\leqslant c(M)$ vertici, che si solleva a $\widetilde{P} \subset \widetilde{M}$ molto buono. Se d è il grado del rivestimento, segue dalla proposizione precedente che $||\widetilde{M}|| \leqslant dc(M)$. D'altra parte, $||\widetilde{M}|| = d||M||$, da cui la tesi. □

Complessità zero

Per spine $P \subset M$ non buone, vale comunque il fatto seguente.

Proposizione

Le k-componenti e quindi gli aperti del ricoprimento indotto hanno immagine finita in $i_* : \pi(M)$.

Se il poliedro P non ha vertici, il nervo $\mathcal{N}$ ha dimensione $< n$. Dal Gromov Vanishing Theorem segue quindi che

Proposizione

Se $c(M) = 0$ *e* M *è chiusa (oppure* ∂M *è amenable) allora* $||M|| = 0$.

Varietà iperboliche

Corollario

Per ogni n e k ci sono solo un numero finito di varietà iperboliche con $c(M^n) < k$.

Varietà iperboliche

Corollario

Per ogni n e k ci sono solo un numero finito di varietà iperboliche con $c(M^n) < k$.

Dimostrazione.

Per $n = 3$, Matveev ha dimostrato che esiste un numero finito di varietà irriducibili. In generale, vale

$$\mathrm{Vol}(M) = K_n ||M||,$$

e ogni volume può essere assunto da un numero finito di varietà iperboliche. Per $n \geqslant 4$, esiste un numero finito di possibili volumi $\leqslant K_n k$ (falso per $n = 3$). $\square$

Curvatura sezionale non-positiva

Teorema

Sia M varietà riemanniana chiusa con curvatura sezionale non-positiva. Allora $c(M) > 0$.

Proof.

M ha un ricoprimento di aperti con immagine finita in $\pi_1(M)$ e nervo di dimensione $< n$. Per Cartan-Hadamard, $\widetilde{M} \cong \mathbb{R}^n$ ed esiste un omeomorfismo di $\widetilde{M}$ che è una contrazione. Il ricoprimento di aperti si solleva ad un ricoprimento equilimitato. La contrazione ne diminuisce arbitrariamente il diametro. Assurdo per l'equivalenza fra dimensione di Brouwer e dimensione topologica. $\square$

Ad esempio, i tori $S^1 \times \ldots \times S^1$ hanno norma di Gromov nulla ma complessità positiva.

Altri teoremi

Teorema (Gromov)

Sia M chiusa riemanniana con $|K(M)| \leqslant 1$. *Allora*

$$c(M) \leqslant t(M) \leqslant \mathrm{const}_n \frac{\mathrm{Vol}(M)}{\mathrm{inj}(M)^n}.$$

Teorema (Alexander-Bishop)

Una varietà riemanniana con bordo M sottile ha $c(M) = 0$.

Una varietà con bordo è *sottile* se ha raggio di iniettività basso rispetto alle curvature sezionali.

Definizione

Per il Teorema di Cartan-Hadamard, una varietà riemanniana M con curvatura non-positiva ha rivestimento universale omeomorfo a $\mathbb{R}^n$. In particolare, M è *asferica*. Vale cioè una delle due condizioni equivalenti:

- Il rivestimento universale $\widetilde{M}$ è contrattile.
- $\pi_i(M) = \{e\}$ per ogni $i \geqslant 2$.

Una varietà asferica ha rivestimento universale omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ per $n \leqslant 3$ (Perelman) ma non per $n \geqslant 4$ (Davis).

Complessità di varietà asferiche

In molti casi (forse tutti) il teorema sulla curvatura non-positiva può essere generalizzato.

Teorema

Sia M chiusa asferica con $\pi_1(M)$ residualmente finito. Allora $c(M) > 0$.

Dimostrazione.

A meno di rivestimenti, possiamo supporre che esista $P \subset M$ molto buona senza vertici. La mappa del ricoprimento $M \to |\mathcal{N}|$ è un isomorfismo sui π_1 e si inverte facilmente sul 2-scheletro di $|\mathcal{N}|$, quindi si estende perché M é asferica. Viene una equivalenza omotopica, assurdo perché $H_n(|\mathcal{N}|) = \{e\}$. $\square$

Doppi

Vale il fatto seguente.

Teorema

Il doppio DM di una 4-varietà M che ha una decomposizione fatta di 0-, 1- e 2−manici ha $c(DM) = 0$.

Come conseguenza, esistono 4-varietà chiuse con $c = 0$ e π_1 arbitrario.

L'ipotesi sui manici è necessaria: se M è iperbolica con bordo geodetico, il suo doppio è iperbolico e quindi ha $c(DM) > 0$.

Simplettiche

Una varietà chiusa è *simplettica* se esiste una 2-forma chiusa ω ovunque non degenere.

Teorema

Per ogni gruppo G finitamente presentato esiste una 4-varietà chiusa simplettica M con $\pi_1(M) = G$ e $c(M) = 0$.

Dimostrazione.

Nella costruzione di Gompf di varietà simplettiche con π_1 arbitrario, queste sono tutte del tipo $N^3 \times S^1$ più manici di ordine 2 e 4. $\square$

Varietà esotiche

Uno dei metodi per costruire varietà omeomorfe ma non diffeomorfe ad una data consiste nel rimuovere un intorno tubolare omeomorfo a $D^2 \times T^2$ di un toro $T^2 \subset M^4$ con numero di Eulero zero e tappare il nuovo bordo $\cong S^1 \times S^1 \times S^1$ con un'altra varietà. Ad esempio:

- La *trasformazione log* consiste nel reincollare $D^2 \times T^2$ con una mappa diversa.

Varietà esotiche

Uno dei metodi per costruire varietà omeomorfe ma non diffeomorfe ad una data consiste nel rimuovere un intorno tubolare omeomorfo a $D^2 \times T^2$ di un toro $T^2 \subset M^4$ con numero di Eulero zero e tappare il nuovo bordo $\cong S^1 \times S^1 \times S^1$ con un'altra varietà. Ad esempio:

- La *trasformazione log* consiste nel reincollare $D^2 \times T^2$ con una mappa diversa.
- La *knot construction* (Fintushel-Stern) consiste nell'incollare $(S^3 \setminus K) \times S^1$.

Se $\pi_1(M^4 \setminus T^2 \subset M^4) = \{e\}$ e gli incollamenti sono di un certo tipo, la varietà ottenuta ha gli stessi invarianti omotopici/omologici e quindi (Freedman) è omeomorfa a M^4. Spesso però ha invarianti di Seiberg-Witten differenti, e quindi non risulta diffeomorfa a M^4.

K3 esotiche

Ad esempio, infinite $K3$ esotiche sono state costruite da Fintushel e Stern prendendo $M = K3 = E(2)$ vista come fibrazione ellittica $M \to S^2$ e T una fibra generica della fibrazione. La knot construction produce una M_K i cui invarianti di Seiberg-Witten sono sostanzialmente il polinomio di Alexander di K.

Teorema

Se $M = K3$, tutte le 4-varietà M_K hanno $c(M_K) = 0$.

Dimostrazione.

Il complementare di T in M è fatto di 2- e 4- manici. Quindi M_K è ottenuta attaccando 2- e 4-manici ad un prodotto $(S^3 \setminus K) \times S^1$. $\square$

Direzioni future

- Studiare le 4-varietà di complessità zero.

Direzioni future

- Studiare le 4-varietà di complessità zero.
- Trovare mosse che collegano due spine della stessa 4-varietà.

Direzioni future

- Studiare le 4-varietà di complessità zero.
- Trovare mosse che collegano due spine della stessa 4-varietà.
- Provare a costruire invarianti combinatori (SW) partendo da una spina.

Direzioni future

- Studiare le 4-varietà di complessità zero.
- Trovare mosse che collegano due spine della stessa 4-varietà.
- Provare a costruire invarianti combinatori (SW) partendo da una spina.
- Studiare la complessità di classi particolari di 4-varietà: $M \times S^1$, $\Sigma_g \times \Sigma_h$, geometriche, a curvatura negativa, asferiche, etc.

Direzioni future

- Studiare le 4-varietà di complessità zero.
- Trovare mosse che collegano due spine della stessa 4-varietà.
- Provare a costruire invarianti combinatori (SW) partendo da una spina.
- Studiare la complessità di classi particolari di 4-varietà: $M \times S^1$, $\Sigma_g \times \Sigma_h$, geometriche, a curvatura negativa, asferiche, etc.
- La *complessità limite* $c^{\inf}(M)$ di una varietà M è l'inf di $c(\widetilde{M})/d$ su tutti i rivestimenti $\widetilde{M} \to M$. Se $\pi_1(M)$ è residualmente finito, vale $||M|| \leqslant c^{\inf}(M)$. Vale l'uguaglianza? (Vale per le Seifert in dimensione 3, e le iperboliche?)