

ISTITUZIONI DI GEOMETRIA 2025/26 - ESERCIZI SETTIMANALI

È sempre lecito e consigliato usare un enunciato degli esercizi precedenti per risolvere un esercizio, anche se non è stato risolto.

1. Esercizi del 27 febbraio

Esercizio 1.1. Costruisci due atlanti lisci non compatibili su \mathbb{R} . Mostra che le due varietà lisce che ne risultano sono però diffeomorfe.

(Nota: Per teoremi profondi, due strutture lisce sulla stessa varietà topologica di dimensione $n \leq 3$ sono sempre diffeomorfe. Questo fatto spesso non è vero in dimensione $n \geq 4$.)

Esercizio 1.2. Sia $U \subset M$ un aperto in una varietà liscia M . Mostra che un omeomorfismo $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una carta compatibile con la struttura liscia di M se e solo se è un diffeomorfismo.

Esercizio 1.3. Per ogni $0 < k < n$, la *Grassmanniana affine* $\text{Graff}_k(\mathbb{R}^n)$ è l'insieme dei sottospazi affini di \mathbb{R}^n di dimensione k . Costruisci una naturale struttura di varietà liscia sull'insieme $\text{Graff}_k(\mathbb{R}^n)$, in modo che venga connessa e la mappa naturale $\text{Graff}_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ che assegna ad ogni sottospazio affine la sua giacitura sia liscia. Non è necessario dimostrare tutto.

Esercizio 1.4. Mostra che la funzione costruita a lezione $S^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ è un diffeomorfismo.

Esercizio 1.5. Una *bandiera* in uno spazio vettoriale reale V di dimensione n è il dato di $n + 1$ sottospazi

$$\{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V$$

dove $\dim V_i = i$. Mostra che lo spazio di tutte le bandiere in V ha una naturale struttura di varietà liscia.

2. Esercizi del 6 marzo

Esercizio 2.1. Considera il gruppo $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ generato da:

$$f(x, y, z) = (x + 1, y, z), \quad g(x, y, z) = (x, y + 1, z),$$

$$h(x, y, z) = (y, -x, z + 1).$$

Mostra che l'azione è libera e propriamente discontinua e che la varietà \mathbb{R}^3/Γ è compatta ed orientabile ma non omeomorfa al 3-toro. Mostra che questa varietà ha un rivestimento di grado 4 diffeomorfo al 3-toro.

Esercizio 2.2. Sia $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ polinomio di grado $d \geq 1$. Considera l'insieme $S = \{z \mid p'(z) = 0\}$. Mostra che la mappa

$$\begin{aligned} p: \mathbb{C} \setminus p^{-1}(p(S)) &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus p(S) \\ z &\longmapsto p(z) \end{aligned}$$

è un rivestimento liscio di grado d .

Esercizio 2.3. Sia $V = M(n+1, \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale formato da tutte le matrici reali $(n+1) \times (n+1)$. Come tutti gli spazi vettoriali di dimensione finita, V è in modo naturale una varietà. Mostra che la mappa

$$f: S^n \longrightarrow V, \quad x \longmapsto x \cdot x^t$$

passa al quoziente e definisce un embedding

$$f: \mathbb{RP}^n \hookrightarrow V.$$

Esercizio 2.4. Sia M compatta e N connessa. Se $\dim M = \dim N$, mostra che ogni embedding $M \rightarrow N$ è un diffeomorfismo.

Esercizio 2.5. Costruisci un embedding del toro n -dimensionale

$$T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

per ogni $n \geq 1$.

3. Esercizi del 13 marzo

Esercizio 3.1. Ricordiamo che \mathbb{RP}^n è l'insieme delle rette vettoriali l in \mathbb{R}^{n+1} . Considera l'insieme

$$E = \{(l, v) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in l\}.$$

Mostra che E è una sottovarietà liscia di $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ e che la mappa $E \rightarrow \mathbb{RP}^n$, $(l, v) \mapsto l$ è un fibrato vettoriale di rango 1 (detto *fibrato tautologico*).

Esercizio 3.2. Mostra che il fibrato tangente TM di una varietà M è sempre una varietà orientabile, anche se M non lo è.

Esercizio 3.3. Sia $\pi: E \rightarrow M$ un fibrato vettoriale, $S \subset M$ un chiuso, e $S \subset U \subset M$ un aperto. Una *sezione parziale* su S è una funzione liscia $s: S \rightarrow E$ tale che $\pi \circ s = \text{id}_M$. Mostra che ogni sezione parziale su S si estende ad una sezione $s': M \rightarrow E$ del fibrato che è nulla fuori dall'aperto U .

Esercizio 3.4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n . Un tensore in $\mathcal{T}_h^k(V)$ è *puro* se può essere scritto come prodotto tensoriale di h vettori di V e k covettori di V^* . Siano $v, v', w, w' \in V^*$ covettori non nulli. Mostra che

- (1) Se v e v' sono indipendenti, allora $v \otimes w$ e $v' \otimes w'$ sono vettori indipendenti in $\mathcal{T}^2(V)$.

(2) Se inoltre anche w e w' sono indipendenti, allora

$$v \otimes w + v' \otimes w' \in \mathcal{T}^2(V)$$

non è un elemento puro.

Esercizio 3.5. Considera l'isomorfismo canonico $\mathcal{T}_1^1(V) = \text{Hom}(V, V)$. Mostra che questo isomorfismo manda gli elementi puri in tutti e soli gli omomorfismi di rango ≤ 1 .

4. Esercizi del 20 marzo

Esercizio 4.1. Siano v_1, \dots, v_n base di V e v^1, \dots, v^n base duale di V^* . Mostra il fatto seguente enunciato a lezione: una base per $\Lambda^k(V)$ è data dagli elementi

$$v^{i_1} \wedge \dots \wedge v^{i_k}$$

con $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.

Esercizio 4.2. Siano $v^1, \dots, v^k \in V^*$. Mostra che questi vettori sono indipendenti $\iff v^1 \wedge \dots \wedge v^k \neq 0$.

I tre esercizi seguenti sono una introduzione alla *teoria di Hodge* che ha importanti applicazioni nella teoria dei campi elettromagnetici e nello studio delle 4-varietà.

Esercizio 4.3. Dato un elemento non nullo $\alpha \in \Lambda^k(V)$ con $k \leq n$, mostra che esiste sempre un $\beta \in \Lambda^{n-k}(V)$ tale che $\alpha \wedge \beta \neq 0$ in $\Lambda^n(V)$.

Deduci da questo fatto che la forma bilineare

$$\begin{aligned} \Lambda^k(V) \times \Lambda^{n-k}(V) &\longrightarrow \Lambda^n(V) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

è non-degenere, cioè che la mappa indotta

$$\begin{aligned} \Lambda^k(V) &\longrightarrow \text{Hom}(\Lambda^{n-k}(V), \Lambda^n(V)) \\ \alpha &\longmapsto (\beta \mapsto \alpha \wedge \beta) \end{aligned}$$

è un isomorfismo. Nota che $\dim \Lambda^n(V) = 1$.

Esercizio 4.4. Sia \langle, \rangle un prodotto scalare su V con segnatura (p, m) . Mostra che esiste un unico prodotto scalare \langle, \rangle su $\Lambda^k(V)$ tale che

$$\langle v^1 \wedge \dots \wedge v^k, w^1 \wedge \dots \wedge w^k \rangle = \det \langle v^i, w^j \rangle$$

per qualsiasi scelta di covettori $v^1, \dots, v^k, w^1, \dots, w^k \in V^*$. Qui $\det \langle v^i, w^j \rangle$ indica il determinante della matrice $k \times k$ il cui elemento i, j è $\langle v^i, w^j \rangle$. Mostra che la segnatura di questo prodotto scalare su $\Lambda^k(V)$ è (p_k, m_k) , dove $p_k + m_k$ e $p_k - m_k$ sono i coefficienti di x^k nei polinomi

$$(1+x)^{p+m}, \quad (1+x)^p(1-x)^m.$$

In particolare se il prodotto scalare su V è definito positivo allora lo è anche quello su $\Lambda^k(V)$.

Esercizio 4.5. Sia V dotato di un prodotto scalare con segnatura (p, m) . Ogni $\Lambda^k(V)$ è munito di un prodotto scalare definito nell'esercizio precedente. Ricordiamo che $\dim \Lambda^n(V) = 1$. Sia $\omega \in \Lambda^n(V)$ un generatore, normalizzato in modo che

$$\langle \omega, \omega \rangle = \pm 1.$$

L'operatore stella di Hodge è la mappa lineare

$$*: \Lambda^k(V) \rightarrow \Lambda^{n-k}(V)$$

che manda $\beta \in \Lambda^k(V)$ nell'unico $*\beta \in \Lambda^{n-k}(V)$ per cui

$$\alpha \wedge (*\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle \omega$$

per ogni $\alpha \in \Lambda^k(V)$. Usando gli esercizi precedenti, mostra che

- (1) La mappa $*$ è ben definita.
- (2) Se v^1, \dots, v^n è una base positiva ortonormale per V^* , allora

$$*(v^1 \wedge \dots \wedge v^k) = (-1)^{m'} v^{k+1} \wedge \dots \wedge v^n$$

dove m' è il numero di vettori in v^1, \dots, v^k tali che $\langle v^i, v^i \rangle = -1$.

- (3) Vale $\langle *\alpha, *\beta \rangle = (-1)^m \langle \alpha, \beta \rangle$. In particolare se m è pari la mappa $*$ è una isometria, e se m è dispari è una *anti-isometria*.
- (4) Vale $**\beta = (-1)^{k(n-k)+m} \beta$ per ogni $\beta \in \Lambda^k(V)$.

5. Esercizi del 27 marzo

Dato un fibrato vettoriale $E \rightarrow M$, ricordiamo che il *fibrato duale* è il fibrato $E^* \rightarrow M$ le cui fibre sono gli spazi duali $(E^*)_p = (E_p)^*$ delle fibre di E . Chiariamo ora come è definita la struttura liscia di E^* . Ogni trivializzazione $\varphi: E|_U \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{R}^k$ di E su un aperto $U \subset M$ induce una trivializzazione $\varphi^*: E^*|_U \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{R}^k$ di E^* sullo stesso aperto nel modo seguente:

$$\varphi^*(v^*) = (p, v^*(\varphi^{-1}(p, e_1)), \dots, \varphi^{-1}(p, e_k))$$

dove $p = \pi(v^*)$, cioè $v^* \in E_p^*$. La struttura liscia su E^* è definita prendendo come atlante le carte φ^* , composte con i diffeomorfismi (quando esistono) tra U e un aperto di \mathbb{R}^n . Queste carte forniscono anche le trivializzazioni del fibrato.

Esercizio 5.1. Sia M varietà liscia con ricoprimento aperto $\{U_i\}$. Sia $f = \{f_{ij}\}$ un cociclo a valori in $GL(k, \mathbb{R})$, che quindi determina un fibrato $E \rightarrow M$. Mostra che $\{{}^t f_{ij}^{-1}\}$ è un cociclo che determina il fibrato duale $E^* \rightarrow M$.

Esercizio 5.2. Considera $\mathbb{R}P^n$ con il ricoprimento di $n+1$ aperti dato dall'atlante standard. Determina un cociclo a valori in $GL(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$ su questo ricoprimento che descriva il fibrato tautologico $\tau: E \rightarrow \mathbb{R}P^n$ dell'Esercizio 3.1.

Esercizio 5.3. Mostra che il toro ha infiniti fibrati di rango 2 non isomorfi.

Esercizio 5.4. Sia G un gruppo di Lie connesso. Sia $\pi: \tilde{G} \rightarrow G$ il rivestimento universale di G e $\tilde{e} \in \tilde{G}$ un punto fissato tale che $\pi(\tilde{e}) = e \in G$. Sia

$$\tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$$

il sollevamento del prodotto $G \times G \rightarrow G$ che manda (\tilde{e}, \tilde{e}) in \tilde{e} . Mostra che

- \tilde{G} è un gruppo di Lie con questa operazione.
- $\pi: \tilde{G} \rightarrow G$ è un omomorfismo di gruppi di Lie, e l'operazione di gruppo sul rivestimento universale \tilde{G} è univocamente determinata dalla richiesta che π sia un omomorfismo.

Esercizio 5.5. Sia X uno spazio topologico connesso per archi con punto base $x_0 \in X$. Se $n \geq 1$ possiamo definire $\pi_n(X, \{x_0\})$ come l'insieme delle funzioni continue $[-1, 1]^n \rightarrow X$ che mandano il bordo del n -cubo $C = [-1, 1]^n$ interamente in x_0 , viste a meno di omotopie che fissano il bordo del cubo. L'azione di $\pi_1(X, \{x_0\})$ su $\pi_n(X, \{x_0\})$ è definita nel modo seguente: date $[f] \in \pi_1(X, \{x_0\})$ e $[g] \in \pi_n(X, \{x_0\})$, definiamo la mappa $f \cdot g: [-1, 1]^n \rightarrow X$ come

$$f \cdot g(x) = \begin{cases} g(2x) & \text{se } \|x\|_\infty \leq 1/2 \\ f(3 - 4\|x\|_\infty) & \text{se } \|x\|_\infty \geq 1/2 \end{cases}$$

Qui $\|x\|_\infty = \max\{\|x^1\|, \dots, \|x^n\|\}$. Definiamo quindi $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$.

- Mostra che $[f \cdot g] \in \pi_n(X, \{x_0\})$ è ben definita.
- Mostra che l'insieme $[S^n, X]$ di tutte le mappe $S^n \rightarrow X$ viste a meno di omotopia è in naturale corrispondenza biunivoca con le orbite di $\pi_n(X, \{x_0\})$ rispetto a questa azione.

Esercizio 5.6. Mostra che se G è un gruppo di Lie connesso, l'azione di $\pi_1(G, \{e\})$ su $\pi_n(G, \{e\})$ definita sopra è banale e quindi $[S^n, G] = \pi_n(G)$.

6. Esercizi del 3 aprile

Esercizio 6.1. Siano X, Y due campi vettoriali in un aperto di \mathbb{R}^n . Mostra che

$$[X, Y]^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}.$$

Esercizio 6.2. Dimostra la identità di Jacobi: dati tre campi vettoriali X, Y, Z su una varietà M , vale

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \equiv 0.$$

Esercizio 6.3. Data una matrice quadrata A , sia X_A il campo vettoriale su \mathbb{R}^n dato da $X_A(x) = Ax$. Mostra che

$$[X_A, X_B] = X_{BA-AB}.$$

Esercizio 6.4. Sia M una varietà, siano X, Y campi vettoriali su M e $f, g \in C^\infty(M)$. Mostra che

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

Esercizio 6.5. Mostra che gli unici sottogruppi di Lie connessi di $SO(3)$ sono l'identità, $SO(3)$, e i sottogruppi isomorfi a S^1 che descrivono le rotazioni intorno ad un asse.

Esercizio 6.6. Costruisci una foliazione sul toro $T = S^1 \times S^1$ che abbia sia foglie compatte che non compatte (cerca di descrivere la foliazione in modo rigoroso, non solo con un disegno).