ISTITUZIONI DI GEOMETRIA 2024/25 - ESERCIZI SETTIMANALI

È sempre lecito e consigliato usare un enunciato degli esercizi precedenti per risolvere un esercizio, anche se non è stato risolto.

1. Esercizi del 28 febbraio

Esercizio 1.1. Costruisci due atlanti lisci non compatibili su $\mathbb{R}$. Mostra che le due varietà lisce che ne risultano sono però diffeomorfe.

(Nota: Per teoremi profondi, due strutture lisce sulla stessa varietà topologica di dimensione $n \leq 3$ sono sempre diffeomorfe. Questo fatto spesso non è vero in dimensione $n \geq 4$.)

Esercizio 1.2. Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ due atlanti lisci su una varietà topologica M. Mostra che sono fatti equivalenti:

(1) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ sono compatibili
(2) per ogni aperto $U \subset M$, le restrizioni $\mathcal{A}|_U$ e $\mathcal{A}'|_U$ sono compatibili
(3) ogni $x \in M$ ha un intorno $U = U(x)$ su cui $\mathcal{A}|_U$ e $\mathcal{A}'|_U$ sono compatibili

Esercizio 1.3. Sia $U \subset M$ un aperto in una varietà liscia M. Mostra che un omeomorfismo $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ è una carta compatibile con la struttura liscia di M se e solo se è un diffeomorfismo.

Esercizio 1.4. Per ogni $0 < k < n$, la *Grassmanniana affine* $\mathrm{Graff}_k(\mathbb{R}^n)$ è l'insieme dei sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$ di dimensione k. Costruisci una naturale struttura di varietà liscia sull'insieme $\mathrm{Graff}_k(\mathbb{R}^n)$, in modo che venga connessa e la mappa naturale $\mathrm{Graff}_k(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ che assegna ad ogni sottospazio affine la sua gacitura sia liscia. Non è necessario dimostrare tutto.

Esercizio 1.5. Considera il gruppo $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ generato da:

$$f(x, y, z) = (x + 1, y, z), \qquad g(x, y, z) = (x, y + 1, z),$$
$$h(x, y, z) = (-x, -y, z + 1).$$

Mostra che l'azione è libera e propriamente discontinua e che la varietà $\mathbb{R}^3/_\Gamma$ è compatta ed orientabile ma non omeomorfa al 3-toro. Mostra che questa varietà ha un rivestimento doppio diffeomorfo al 3-toro.

Esercizio 1.6. Considera il gruppo $\Gamma < \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ generato da

$$f(x, y) = \left(2x, \tfrac{1}{2}y\right).$$

Mostra che Γ non agisce in modo propriamente discontinuo sulla varietà $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Mostra che la mappa $M \to M/_\Gamma$ è comunque un rivestimento, ed il quoziente $M/_\Gamma$ è una superficie non di Hausdorff (ogni punto ha un intorno omeomorfo a $\mathbb{R}^2$, ma non è di Hausdorff!).

Esercizio 1.7. Mostra che la funzione costruita a lezione $S^2 \to \mathbb{CP}^1$ è un diffeomorfismo.

2. Esercizi del 7 marzo

Esercizio 2.1. Sia $f : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^4$ la mappa
$$f([x,y,z]) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}(x^2-y^2, xy, xz, yz).$$
Mostra che f è un embedding.

Esercizio 2.2. Sia $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ polinomio di grado $d \geq 1$. Considera l'insieme $S = \{z \mid p'(z) = 0\}$. Mostra che la mappa
$$\begin{aligned} p : \mathbb{C} \setminus p^{-1}(p(S)) &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus p(S) \\ z &\longmapsto p(z) \end{aligned}$$
è un rivestimento liscio di grado d.

Esercizio 2.3. Sia M compatta e N connessa. Se $\dim M = \dim N$, mostra che ogni embedding $M \to N$ è un diffeomorfismo.

Esercizio 2.4. Siano p, q due numeri reali con $\frac{p}{q}$ irrazionale. Mostra che la mappa
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \times S^1 \\ t &\longmapsto (e^{pit}, e^{qit}) \end{aligned}$$
è una immersione iniettiva ma non un embedding. Mostra che l'immagine è densa in $S^1 \times S^1$.

Esercizio 2.5. Mostra che una sommersione è sempre una mappa aperta. Deduci che se M è compatta allora non esistono sommersioni $M \to \mathbb{R}^k$ per nessun k.

Esercizio 2.6. Mostra che per ogni varietà liscia M esiste una funzione propria $f : M \to \mathbb{R}$

Esercizio 2.7. Siano $S_0, S_1 \subset M$ due chiusi disgiunti in una varietà liscia M. Mostra che esiste una funzione liscia $f : M \to \mathbb{R}$ tale che $f(S_i) = i$ per $i = 0, 1$ e $f(x) \in (0,1)$ per ogni $x \in M \setminus (S_0 \cup S_1)$.

3. Esercizi del 14 marzo

Negli esercizi seguenti V è sempre uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Un elemento di $\mathcal{T}^k_h(V)$ è *puro* se può essere scritto come prodotto tensoriale di h vettori di V e k covettori di V^*.

Esercizio 3.1. Siano $v, v', w, w' \in V^*$ covettori non nulli.

(1) Se v e v' sono indipendenti, allora $v \otimes w$ e $v' \otimes w'$ sono vettori indipendenti in $\mathcal{T}^2(V)$.

(2) Se inoltre anche w e w' sono indipendenti, allora
$$v \otimes w + v' \otimes w' \in \mathcal{T}^2(V)$$
non è un elemento puro.

Esercizio 3.2. Considera l'isomorfismo canonico $\mathcal{T}_1^1(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$. Mostra che questo isomorfismo manda gli elementi puri in tutti e soli gli omomorfismi di rango ≤ 1.

Esercizio 3.3. Siano $v_1, \ldots, v_n$ base di V e $v^1, \ldots, v^n$ base duale di V^*. Mostra il fatto seguente enunciato a lezione: una base per $\Lambda^k(V)$ è data dagli elementi
$$v^{i_1} \wedge \cdots \wedge v^{i_k}$$
con $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$.

Esercizio 3.4. Siano $v^1, \ldots, v^k \in V^*$. Mostra che questi vettori sono indipendenti $\iff v^1 \wedge \cdots \wedge v^k \neq 0$.

I tre esercizi seguenti sono una introduzione alla *teoria di Hodge*.

Esercizio 3.5. Dato un elemento non nullo $\alpha \in \Lambda^k(V)$ con $k \leq n$, mostra che esiste sempre un $\beta \in \Lambda^{n-k}(V)$ tale che $\alpha \wedge \beta \neq 0$ in $\Lambda^n(V)$.

Deduci da questo fatto che la forma bilineare
$$\begin{aligned} \Lambda^k(V) \times \Lambda^{n-k}(V) &\longrightarrow \Lambda^n(V) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$
è non-degenere, cioè che la mappa indotta
$$\begin{aligned} \Lambda^k(V) &\longrightarrow \mathrm{Hom}\big(\Lambda^{n-k}(V), \Lambda^n(V)\big) \\ \alpha &\longmapsto (\beta \mapsto \alpha \wedge \beta) \end{aligned}$$
è un isomorfismo. Nota che $\dim \Lambda^n(V) = 1$.

Esercizio 3.6. Sia $\langle , \rangle$ un prodotto scalare su V. Mostra che esiste un unico prodotto scalare $\langle , \rangle$ su $\Lambda^k(V)$ tale che
$$\langle v^1 \wedge \cdots \wedge v^k, w^1 \wedge \cdots \wedge w^k \rangle = \det \langle v^i, w^j \rangle$$
per qualsiasi scelta di covettori $v^1, \ldots, v^k, w^1, \ldots, w^k \in V^*$. Qui $\det\langle v^i, w^j \rangle$ indica il determinante della matrice $k \times k$ il cui elemento i, j è $\langle v^i, w^j \rangle$. Mostra che se il prodotto $\langle , \rangle$ su V è definito positivo allora anche quello indotto su $\Lambda^k(V)$ lo è.

Esercizio 3.7. Sia V dotato di un prodotto scalare definito positivo. Sia $\omega \in \Lambda^n(V)$ un generatore, normalizzato in modo che
$$\langle \omega, \omega \rangle = 1.$$
L'*operatore stella di Hodge* è la mappa lineare
$$*\colon \Lambda^k(V) \to \Lambda^{n-k}(V)$$

che manda $\beta \in \Lambda^k(V)$ nell'unico $*\beta \in \Lambda^{n-k}(V)$ per cui

$$\alpha \wedge (*\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle \omega$$

per ogni $\alpha \in \Lambda^k(V)$. Usando gli esercizi precedenti, mostra che

(1) La mappa $*$ è ben definita.
(2) Se $v^1, \dots, v^n$ è una base positiva ortonormale per V^*, allora

$$*(v^1 \wedge \cdots \wedge v^k) = v^{k+1} \wedge \cdots \wedge v^n.$$

(3) La mappa $*$ è una isometria.
(4) Vale $**\beta = (-1)^{k(n-k)}\beta$ per ogni $\beta \in \Lambda^k(V)$.

4. Esercizi del 21 marzo

Esercizio 4.1. Ricordiamo che $\mathbb{RP}^n$ è l'insieme delle rette vettoriali l in $\mathbb{R}^{n+1}$. Considera l'insieme

$$E = \left\{ (l, v) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; v \in l \right\}.$$

Mostra che E è una sottovarietà liscia di $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ e che la mappa $E \to \mathbb{RP}^n$, $(l, v) \mapsto l$ è un fibrato vettoriale di rango 1 (detto *fibrato tautologico*).

Esercizio 4.2. Mostra che il fibrato tangente TM di una varietà M è sempre orientabile, anche se M non lo è.

Esercizio 4.3. Sia $E \to M$ un fibrato vettoriale e $S \subset M$ un sottoinsieme chiuso. Mostra che ogni sezione parziale definita su S si estende ad una sezione globale su M (suggerimento: adatta la dimostrazione vista per le funzioni $S \to \mathbb{R}^k$).

Esercizio 4.4. Siano X, Y due campi vettoriali in un aperto di $\mathbb{R}^n$. Mostra che

$$[X, Y]^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}.$$

Esercizio 4.5. Dimostra la identità di Jacobi: dati tre campi vettoriali X, Y, Z su una varietà M, vale

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \equiv 0.$$

Esercizio 4.6. Data una matrice quadrata A, sia X_A il campo vettoriale su $\mathbb{R}^n$ dato da $X_A(x) = Ax$. Mostra che

$$[X_A, X_B] = X_{BA-AB}.$$

Esercizio 4.7. Sia M una varietà, siano X, Y campi vettoriali su M e $f, g \in C^\infty(M)$. Mostra che

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

5. Esercizi del 28 marzo

Esercizio 5.1. Mostra che una distribuzione D di rango 1 in una varietà M è sempre integrabile.

Esercizio 5.2. Sia M varietà dotata di una struttura Riemanniana g, cioè g è un campo tensoriale $(0, 2)$ su TM simmetrico e definito positivo ovunque. Se una distribuzione D è integrable, la distribuzione ortgonale $D^\perp$ è sempre integrabile? La distribuzione ortogonale è definita in modo ovvio come $(D^\perp)_p = (D_p)^\perp$ per ogni p. (Se la risposta è sì dimostralo, se è no esibisci un controesempio.)

Esercizio 5.3. Siano X, Y campi vettoriali in una varietà M. Mostra che

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X,Y]}.$$

Questa è un'uguaglianza fra operatori su $\Gamma(\mathcal{T}^h_k(M))$. Il bracket $[A, B]$ di due operatori A, B è per definizione $[A, B] = AB - BA$. Qui $\mathcal{L}_X$ è la derivata di Lie lungo X. Nota che se $(h, k) = (1, 0)$ questo è equivalente all'identiià di Jacobi sui campi vettoriali. Questa uguaglianza può essere enunciata dicendo che la derivata di Lie fornisce un omomorfismo di algebre di Lie da $\mathfrak{X}(M)$ nell'algebra di Lie degli operatori su $\Gamma(\mathcal{T}^h_k(M))$.

Esercizio 5.4. Considera su $\mathbb{R}^3$, con coordinate (x_1, x_2, x_3), una generica distribuzione di piani

$$D_x = \big\{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0\big\}.$$

Considera il campo $X = a_i\frac{\partial}{\partial x_i}$. Mostra che la distribuzione è integrabile se e solo se

$$X \cdot \mathrm{rot} X = 0$$

in ogni punto. Qui $\mathrm{rot}X$ indica il rotore di X.

Esercizio 5.5. Mostra che gli unici sottogruppi di Lie connessi di $\mathrm{SO}(3)$ sono l'identità, $\mathrm{SO}(3)$, e i sottogruppi isomorfi a S^1 che descrivono le rotazioni intorno ad un asse.

Esercizio 5.6. Mostra che le classi di coniugio di quaternioni non reali formano una foliazione in sfere di $\mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$.

Esercizio 5.7. Sia $T_{12} < \mathrm{SO}(3)$ il sottogruppo delle isometrie che preservano l'orientazione di un tetraetro regolare fissato in $\mathbb{R}^3$ con baricentro nell'origine. La controimmagine $T^*_{24} < S^3$ attraverso il rivestimento doppio $S^3 \to \mathrm{SO}(3)$ è un sottogruppo di ordine 24 detto *gruppo tetraedrale binario*. Mostra che l'inviluppo convesso di T^*_{24} in $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ è un politopo regolare in $\mathbb{R}^4$, detto *24-celle*. Descrivi le 24 facce di questo politopo (il 24-celle è l'unico politopo regolare *autoduale* in ogni dimensione n che non sia un simplesso: ha tante facce quanti vertici).

Mostra che l'azione del sottogruppo T^*_{24} su S^3 per moltiplicazione a sinistra è libera e propriamente discontinua, quindi S^3/T^*_{24} è una 3-varietà. Sai individuare un dominio fondamentale per l'azione di T^*_{24} su S^3?

(In modo simile ma più complicato la controimmagine del gruppo I_{60} delle isometrie che preservano l'orientazione di un icosaedro o dodecaedro è un gruppo I^*_{120} di ordine 120 il cui inviluppo convesso è il politopo regolare chiamato *600-celle*. Inoltre I^*_{120} è un gruppo perfetto, ed il quoziente S^3/I^*_{120} è una 3-varietà con gruppo fondamentale finito I^*_{120} perfetto, nota come *sfera di Poincaré*.)

6. Esercizi del 4 aprile

Esercizio 6.1. Mostra che una n-varietà M è orientabile $\Longleftrightarrow$ esiste una n-forma mai nulla su M.

Esercizio 6.2. Sia $f\colon M \to N$ una mappa liscia fra varietà. Siano $\omega \in \Omega^k(N)$ e $\eta \in \Omega^h(N)$. Dimostra che

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge g^*(\eta).$$

Esercizio 6.3. Sia $\varphi\colon M \to N$ una mappa liscia fra varietà e $\omega \in \Omega^k(N)$. Otteniamo

$$d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega).$$

Suggerimento. Mostra il teorema nel caso in cui $\omega = f$ sia una funzione e nel caso in cui $\omega = dg$ sia il differenziale di una funzione. Deduci il caso generale dalle buone proprietà di d rispetto alle operazioni $+$ e $\wedge$. $\square$

Esercizio 6.4. Sia $\omega \in \Omega^1(M)$ una 1-forma su una varietà M senza bordo. Supponiamo che ω sia chiusa (cioè $d\omega = 0$) e mai nulla. Poiché $\omega(p) \neq 0$ per ogni $p \in M$, il funzionale $\omega(p)\colon T_pM \to \mathbb{R}$ è non banale e possiamo definire la distribuzione di iperpiani:

$$D(p) = \ker \omega(p).$$

Mostra che D è integrabile e quindi tangente ad una foliazione su M.

Esercizio 6.5. Sia D una distribuzione di piani in una 3-varietà M senza bordo. Mostra che D è integrabile $\Longleftrightarrow$ per ogni 1-forma α mai nulla definita su un aperto di M avente $\ker \alpha = D$ abbiamo $\alpha \wedge d\alpha = 0$.

Una *forma simplettica* su una varietà N è una 2-forma $\omega \in \Omega^2(M)$ che è chiusa (cioè $d\omega = 0$) e *non-degenere*, cioè per ogni $p \in M$ e per ogni $v \in T_pM$ esiste $w \in T_pM$ tale che $\omega(p)(v, w) \neq 0$.

Esercizio 6.6. Mostra i fatti seguenti:

(1) Se ω è una forma simplettica su N, allora N ha dimensione pari.
(2) Costruisci una forma simplettica su $\mathbb{R}^{2n}$ e sul toro $2n$-dimensionale.

(3) Sia $\pi\colon T^*M \to M$ il fibrato cotangente di una varietà M di dimensione n. Nota che T^*M è una varietà di dimensione $2n$. La *1-forma tautologica* $\theta \in \Omega^1(T^*M)$ sulla varietà T^*M è definita nel modo seguente: un punto $\alpha \in T^*M$ è per definizione un funzionale $\alpha\colon T_pM \to \mathbb{R}$ con $p = \pi(\alpha)$. Sia $v \in T_\alpha(T^*M)$. Poniamo

$$\theta(\alpha)(v) = \alpha(d\pi_\alpha(v)).$$

Mostra che $d\theta$ è una forma simplettica su T^*M.

(4) Mostra che se ω è una forma simplettica su N allora esiste un'orientazione su N per cui $\omega \wedge \cdots \wedge \omega$ è una forma volume.

Esercizio 6.7. Mostra che una superficie orientabile che ammette un campo di vettori mai nulli è sempre parallelizzabile.

7. Esercizi dell' 11 aprile

Esercizio 7.1. Mostra che per qualsiasi successione esatta di spazi vettoriali finito dimensionali

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{k-1}} V_k \longrightarrow 0$$

vale la relazione

$$\sum_{i=1}^k (-1)^i \dim V_i = 0.$$

Deduci il fatto seguente. Sia $M = U \cup V$ varietà con U, V aperti. Supponiamo che i numberi di Betti di $U \cap V, U, V, M$ siano tutti finiti. Allora

$$\chi(M) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V).$$

Esercizio 7.2. Calcola i numeri di Betti della superficie $\mathbb{C} \setminus \{1, 2, \dots, k\}$ e della superficie $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Esercizio 7.3. Sia M una varietà orientabile e senza bordo. Mostra che

$$b_c^{k+h}(M \times \mathbb{R}^h) = b_c^k(M)$$

per ogni k e h. Ricordiamo che $b_c^k(N) = \dim H_c^k(N)$.

Esercizio 7.4. Sia M una varietà connessa e $p \in M$ un punto. Costruisci un morfismo iniettivo di spazi vettoriali

$$H^1(M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\pi_1(M, p), \mathbb{R}).$$

Deduci che se M è semplicemente connessa allora $b^1(M) = 0$.

(Nota: in realtà il morfismo viene un isomorfismo, ma la suriettività è più difficile da dimostrare.)

Esercizio 7.5. Sia $M\#N$ la somma connessa di due varietà connesse, orientate, compatte e senza bordo. Dimostra le uguaglianze seguenti:

$$b^i(M\#N) = 1 \quad \text{se } i = 0, n,$$
$$b^i(M\#N) = b^i(M) + b^i(N) \quad \text{se } 0 < i < n.$$

Deduci che i numeri di Betti della superficie S_g di genere g sono

$$b^0(S_g) = 1, \qquad b^1(S_g) = 2g, \qquad b^2(S_g) = 1$$

e quindi $\chi(S_g) = 2 - 2g$.

Esercizio 7.6. Sia $S \subset \mathbb{CP}^n$ un sottospazio proiettivo di dimensione complessa $k \leq n$. Mostra che la mappa $i^*\colon H^{2k}(\mathbb{CP}^n) \to H^{2k}(S)$ è un isomorfismo.

Esercizio 7.7. Sia M una varietà compatta, senza bordo, connessa, orientata. Date due forme volume $\omega, \eta \in \Omega^n(M)$, mostra che esiste un diffeomorfismo $\varphi\colon M \to N$ isotopo all'identità tale che $\varphi^*(\omega) = \eta$ se e solo se $\int_M \omega = \int_M \eta$. L'implicazione difficile è l'esistenza di φ, che si fa secondo questi passi:

(1) Mostra che esiste $\beta \in \Omega^{n-1}(M)$ tale che $\omega - \eta = d\beta$.
(2) Mostra che $\omega_t = \eta + td\beta$ è una forma volume per ogni $t \in [0, 1]$.
(3) Mostra che per ogni $t \in [0, 1]$ esiste un unico $X_t \in \mathfrak{X}(M)$ tale che $\iota_{X_t}(\omega_t) = \beta$. Diamo per buono che X_t dipende in modo liscio da t.
(4) Mostra che $\mathcal{L}_{X_t}(\omega_t) = \frac{d}{dt}\omega_t$.
(5) Mostra che esiste una famiglia liscia $\varphi_t\colon M \to M$ di diffeomorfismi tali che $\varphi_t^*(\omega_t) = \omega_0$.

8. Esercizi del 18 aprile

Esercizio 8.1. Sia $T = S^1 \times S^1$ il toro e $p \in T$ un punto. Considera la 4-varietà $M = T \times T$ e le sottovarietà $N_1 = T \times \{p\}$ e $N_2 = \{p\} \times T$. Calcola i gruppi di coomologia di

$$X = M \setminus (N_1 \cup N_2).$$

Esercizio 8.2. Siano M e N varietà con coomologia finito-dimensionale. Dimostra che

$$\chi(M \times N) = \chi(M) \cdot \chi(N).$$

Esercizio 8.3. Costruisci delle varietà orientabili e non orientabili con delle metriche Lorentziane tempo-orientabili e tempo-non orientabili (sono 4 casi).

Ricordiamo che il piano iperbolico nel modello del semipiano è la varietà Riemanniana seguente:

$$H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \quad g = \frac{1}{y^2} g^E.$$

Esercizio 8.4. Nel piano iperbolico H^2 nel modello del semipiano, calcola l'area del dominio

$$[-a, a] \times [b, \infty)$$

per ogni $a, b > 0$. L'area è ovviamente quella indotta dalla forma volume della varietà riemanniana H^2.

Esercizio 8.5. Identifichiamo $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ e scriviamo il modello del sempiano del piano iperbolico come $H^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$. Mostra che le trasformazioni di Möbius

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $\det \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) > 0$ sono tutte isometrie di H^2 che preservano l'orientazione. Mostra che agiscono transitivamente sui frame positivi.

Esercizio 8.6. Mostra che ogni gruppo di Lie G ha una metrica invariante a sinistra, cioè tale che L_g è una isometria per ogni $g \in G$.

Esercizio 8.7. (Difficile, cerca informazioni in rete.) Sia G un gruppo di Lie compatto. Mostra che esiste sempre una metrica riemanniana su G *biinvariante*, cioè tale che L_g e R_g siano entrambe isometrie per ogni $g \in G$.

9. Esercizi del 2 maggio

Esercizio 9.1. Sia M una varietà dotata di una connessione ∇ e $\gamma\colon I \to M$ una curva. Mostra che il trasporto parallelo

$$\Gamma(\gamma)_{t_0}^{t_1}\colon T_{\gamma(t_0)}M \longrightarrow T_{\gamma(t_1)}M$$

è invariante per riparametrizzzazione di γ. Cioè, se prendiamo una mappa suriettiva $\alpha\colon J \to I$ con $\alpha'(t) \geq 0$ per ogni $t \in J$, allora

$$\Gamma(\gamma)_{t_0}^{t_1} = \Gamma(\gamma \circ \alpha)_{u_0}^{u_1}$$

per qualsiasi $u_0, u_1 \in J$ con $\alpha(u_i) = t_i$.

Grazie a questo esercizio non è necessario specificare la parametrizzazione di una curva quando si parla di trasporto parallelo.

Esercizio 9.2. Scrivi la metrica euclidea g su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ usando coordinate polari (θ, ρ) e determina i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita rispetto a queste variabili θ, ρ. Determina il trasporto parallelo lungo un arco di circonferenza (centrato nell'origine) generico usando queste coordinate e verifica che coincide con il trasporto parallelo nelle coordinate Euclidee.

Esercizio 9.3. Considera il vettore tangente $v_0 = (0, -\sin\theta, \cos\theta)$ nel punto $P = (0, \cos\theta, \sin\theta)$ sulla sfera S^2. Determina il trasporto parallelo di v_0 lungo il meridiano $z = \sin\theta$ passante per P.

Esercizio 9.4. Sia $H^2 \subset \mathbb{R}^2$ il piano iperbolico definito con il modello del semipiano. Sia $v_0 = (0,1)$ vettore tangente nel punto $(0,1) \in H^2$. Sia v_t il trasporto parallelo di v_0 lungo la curva $\gamma(t) = (t,1)$. Determina il vettore v_t in funzione di t.

Esercizio 9.5. Sia M una varietà pseudo-Riemanniana connessa. Sia $p \in M$ un punto. Il *gruppo di olonomia* di M in p è il sottoinsieme

$$H_p = \left\{\Gamma(\gamma)_{t_0}^{t_1}\right\} \subset \mathrm{O}(T_pM, g(p))$$

ottenuto al variare di tutte le curve $\gamma\colon I \to M$ con $t_0 < t_1$ contenuti in I e tali che $\gamma(t_0) = \gamma(t_1) = p$. Mostra che H_p è effettivamente un sottogruppo. Mostra che se $p, q \in M$ allora H_p e H_q sono isomorfi. Determina il tipo di isomorfismo di H_p per $M = \mathbb{R}^n$ e $M = S^2$.

Esercizio 9.6. Costruisci una connessione su una varietà che non è compatibile con nessuna metrica Riemanniana.

Esercizio 9.7. Sia (M,g) una varietà Riemanniana. La *divergenza* di un campo vettoriale X è definita come la contrazione del campo tensoriale ∇X di tipo $(1,1)$. In coordinate:

$$\mathrm{div}(X) = \nabla_i X^i.$$

Mostra che in un qualsiasi sistema di coordinate valgono le formule seguenti:

$$\Gamma_{ji}^j = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{\det g},$$

$$\mathrm{div}(X) = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(X^i\sqrt{\det g}\right).$$

Nella scrittura di Γ_{ji}^j usiamo la convenzione di Einstein.

10. Esercizi del 9 maggio

Esercizio 10.1. Considera la connessione ∇ su $\mathbb{R}^3$ con simboli di Christoffel

$$\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{31}^2 = 1$$

$$\Gamma_{21}^3 = \Gamma_{32}^1 = \Gamma_{13}^2 = -1$$

e tutti gli altri simboli di Christoffel nulli. Mostra che questa connessione è compatibile con il tensore metrico euclideo g, ma non è simmetrica. Quali sono le geodetiche?

Esercizio 10.2. Considera il modello dell'iperboloide $I^n \subset \mathbb{R}^{n,1}$ dello spazio iperbolico. Mostra che per ogni $p, q \in I^n$ vale l'uguaglianza

$$\cosh d(p,q) = -\langle p, q\rangle.$$

Esercizio 10.3. Sia M una varietà Riemanniana connessa completa. Sia X un campo su M tale che $\|X(p)\| \leq C$ per ogni $p \in M$, per qualche costante $C > 0$ indipendente da p. Mostra che X è completo.

Esercizio 10.4. Siano ∇, ∇' due connessioni su M. Definiamo un campo tensoriale $D = \nabla - \nabla'$ di tipo $(1,2)$ nel modo seguente: per ogni $v, w \in T_pM$, sia Y estensione locale di w a campo vicino a p, e poniamo

$$D(v,w) = \nabla_v Y - \nabla'_v Y.$$

Mostra che $D(v,w) \in T_pM$ è effettivamente indipendente dalla scelta dell'estensione Y. Mostra che ∇ e ∇' hanno le stesse geodetiche $\iff$ D è un tensore antisimmetrico.[1] Deduci che:

(1) $\nabla = \nabla' \iff$ hanno le stesse geodetiche e la stessa torsione.
(2) Per ogni ∇ esiste un'unica connessione ∇' con le stesse geodetiche di ∇ e con torsione nulla.

Hint. Dimostra che D è antisimmetrico $\iff D(X,X) = 0$ per ogni campo X $\iff \nabla'_X X = \nabla_X X$ per ogni campo $X \iff$ hanno le stesse geodetiche. $\square$

Esercizio 10.5 (Il toro di Clifton – Pohl)**.** Considera la varietà $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dotata della metrica Lorentziana

$$g(x,y) = \frac{2}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ogni mappa $f(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$ è una isometria per questa metrica. In particolare possiamo quozientare M con l'isometria $f(x,y) = (2x,2y)$ e ottenere una superficie T diffeomorfa ad un toro. La struttura Lorentziana su M ne induce una su T. Dimostra che le curve

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{1-t}, 0\right), \qquad \eta(t) = (\tan(t), 1)$$

sono entrambe geodetiche massimali definite su $(-\infty, 1)$ e $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Quindi T è compatta ma non geodeticamente completa (questo fatto è impossibile nelle varietà Riemanniane per Hopf – Rinow).

Una varietà pseudo-Riemanniana connessa M è *omogenea* se per ogni coppia di punti $p, q \in M$ esiste una isometria $f\colon M \to M$ tale che $f(p) = q$. La varietà M è *isotropa* in $p \in M$ se per ogni coppia di vettori $v, w \in T_pM$ con $\langle v, v\rangle = \langle w, w\rangle$ esiste una isometria $f\colon M \to M$ con $f(p) = p$ e $df_p(v) = w$.

Esercizio 10.6. Mostra che una varietà riemanniana omogenea è sempre completa.

Esercizio 10.7. Mostra che una varietà riemanniana completa che è isotropa in ogni suo punto è anche omogenea.

[1] Cioè per ogni $p \in M$ la mappa $D(p)\colon T_pM \times T_pM \to T_pM$ è antisimmetrica, cioè $D(p)(v,w) = -D(p)(w,v)$. In coordinate: $D^k_{ij} = -D^k_{ji}$.

11. Esercizi del 16 maggio

Una *isometria locale* fra varietà pseudo-Riemanniane è una $f\colon M \to N$ tale che per ogni $p \in M$ esistono intorni aperti $U(p)$ e $V(f(p))$ tali che $f(U) = V$ e $f|_U\colon U \to V$ sia un'isometria.

Esercizio 11.1. Sia $f\colon M \to N$ una isometria locale fra varietà riemanniane connesse che è anche un rivestimento. Mostra che M è completa $\iff$ N è completa.

Esercizio 11.2. Dimostra che S^2 ha curvatura sezionale costante $+1$, calcolando in una carta il tensore di Riemann.

Esercizio 11.3. Sia $R > 0$. Considera la varietà $M = \mathbb{R} \times (R, +\infty) \times S^2$, con variabili t, r, θ, ϕ, dotata del tensore metrico lorentziano di Schwarzschild

$$g = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{R}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Mostra che il tensore di Ricci è nullo in ogni punto di M, ma il tensore di Riemann no. Questa è la metrica che descrive lo spaziotempo intorno ad una stella o ad un buco nero non carico e non ruotante: il tensore di Ricci è nullo perché lontano dal centro non c'è massa, ma il tensore di Riemann non è nullo, perché lo spaziotempo è comunque curvo anche dove non c'è massa.

Esercizio 11.4. Se hai fatto l'Esercizio 9.2, calcola il tensore di Riemann in coordinate polari (sai già che valori devono uscire?).

Esercizio 11.5. Sia (M, g) una varietà pseudo-Riemanniana connessa piatta (cioè con tensore di Riemann ovunque nullo). Sia $\gamma\colon [0, 1] \to M$ una curva liscia. Mostra che il trasporto parallelo $\Gamma_0^1(\gamma)\colon T_{\gamma(0)}M \to T_{\gamma(1)}M$ non cambia se modifichiamo γ con una omotopia ad estremi fissati. Usa questo fatto per mostrare che l'olonomia dell'Esercizio 9.5 fornisce un naturale omomorfismo $\pi_1(M) \to \mathrm{O}(p, q)$. Costruisci una varietà piatta (M, g) in cui questo omomorfismo è non banale.

Esercizio 11.6. Sia $T \subset \mathbb{H}^2$ un triangolo nel piano iperbolico (scegli tu in quale modello). Un triangolo è una parte di piano delimitata da 3 segmenti geodetici che congiungono tre punti A, B, C. Siano α, β, γ gli angoli interni del triangolo, che supponiamo tutti acuti per semplicità. Mostra che

$$\mathrm{Area}(T) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Esercizio 11.7. Mostra che se (M, g) ha curvatura sezionale costante allora $\nabla R = 0$, dove R è il tensore di Riemann.