ISTITUZIONI DI GEOMETRIA 2023/24 - ESERCIZI SETTIMANALI

È sempre lecito e consigliato usare un enunciato degli esercizi precedenti per risolvere un esercizio, anche se non è stato risolto.

1. Esercizi del 29 febbraio

Esercizio 1.1. Costruisci due atlanti lisci non compatibili su $\mathbb{R}$. Mostra che le due varietà lisce che ne risultano sono però diffeomorfe.

(Nota: Per teoremi profondi, due strutture lisce sulla stessa varietà topologica di dimensione $n \leq 3$ sono sempre diffeomorfe. Questo fatto spesso non è vero in dimensione $n \geq 4$.)

Esercizio 1.2. Mostra che la mappa

$$S^n \to \mathbb{RP}^n, \qquad (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto [x_1, \dots, x_{n+1}]$$

è liscia.

Esercizio 1.3. Costruisci un diffeomorfismo fra $\mathbb{RP}^1$ e S^1.

Esercizio 1.4. Sia $f : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^4$ la mappa

$$f([x, y, z]) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}(x^2 - y^2, xy, xz, yz).$$

Mostra che f è iniettiva e df_p è iniettivo per ogni $p \in \mathbb{RP}^2$.

Esercizio 1.5. Sia $U \subset M$ un aperto in una varietà liscia M. Mostra che un omeomorfismo $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ è una carta compatibile con la struttura liscia di M se e solo se è un diffeomorfismo.

Esercizio 1.6. Sia $S \subset M$ un chiuso in una varietà liscia M. Mostra che esiste una funzione liscia $f : M \to \mathbb{R}$ tale che $f^{-1}(0) = S$.

Esercizio 1.7. Siano $S_0, S_1 \subset M$ due chiusi disgiunti in una varietà liscia M. Mostra che esiste una funzione liscia $f : M \to \mathbb{R}$ tale che $f(S_i) = i$ per $i = 0, 1$ e $f(x) \in (0, 1)$ per ogni $x \in M \setminus (S_0 \cup S_1)$.

Esercizio 1.8. Per ogni $0 < k < n$, la *Grassmanniana affine* $\mathrm{Graff}_k(\mathbb{R}^n)$ è l'insieme dei sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$ di dimensione k. Costruisci una naturale struttura di varietà liscia sull'insieme $\mathrm{Graff}_k(\mathbb{R}^n)$, in modo che venga connessa e la mappa naturale $\mathrm{Graff}_k(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{Gr}_k(\mathbb{R}^n)$ che assegna ad ogni sottospazio affine la sua gacitura sia liscia. Non è necessario dimostrare tutto.

2. Esercizi del 7 marzo

Esercizio 2.1. Sia $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ polinomio di grado $d \geq 1$. Considera l'insieme $S = \{z \mid p'(z) = 0\}$. Mostra che la mappa

$$\begin{aligned} p : \mathbb{C} \setminus p^{-1}(p(S)) &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus p(S) \\ z &\longmapsto p(z) \end{aligned}$$

è un rivestimento liscio di grado d.

Esercizio 2.2. Considera il gruppo $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ generato da:

$$f(x,y,z) = (x+1,y,z), \qquad g(x,y,z) = (x,y+1,z),$$
$$h(x,y,z) = (-x,-y,z+1).$$

Mostra che l'azione è libera e propriamente discontinua e che la varietà $\mathbb{R}^3/_\Gamma$ è compatta ed orientabile ma non omeomorfa al 3-toro. Mostra che questa varietà ha un rivestimento doppio diffeomorfo al 3-toro.

Esercizio 2.3. Considera il gruppo $\Gamma < \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ generato da

$$f(x,y) = \left(2x, \tfrac{1}{2}y\right).$$

Mostra che Γ non agisce in modo propriamente discontinuo sulla varietà $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Mostra che la mappa $M \to M/_\Gamma$ è comunque un rivestimento, ed il quoziente $M/_\Gamma$ è una superficie non di Hausdorff (ogni punto ha un intorno omeomorfo a $\mathbb{R}^2$, ma non è di Hausdorff!).

Esercizio 2.4. Sia $f\colon M \to N$ un omeomorfismo fra varietà lisce che è anche un diffeomorfismo locale. Mostra che f è un diffeomorfismo. Deduci che le due definizioni seguenti di rivestimento liscio sono equivalenti: una funzione liscia $f\colon M \to N$ fra varietà lisce è un *rivestimento liscio* se

(1) ogni punto $x \in N$ ha un intorno aperto U tale che
$$p^{-1}(U) = \sqcup_{i\in I} U_i$$
e la restrizione $\pi|_{U_i}\colon U_i \to U$ è un diffeomorfismo;
(2) è un rivestimento topologico e un diffeomorfismo locale.

Esercizio 2.5. Sia M compatta e N connessa. Se $\dim M = \dim N$, mostra che ogni embedding $M \to N$ è un diffeomorfismo.

Esercizio 2.6. Un *nodo* è una sottovarietà di $\mathbb{R}^3$ diffeomorfa a S^1. Ricorda che $\mathbb{RP}^2$ è interpretabile come l'insieme delle rette vettoriali in $\mathbb{R}^3$. Dato un nodo $K \subset \mathbb{R}^3$, mostra che:

(1) La funzione $f\colon K \to \mathbb{RP}^2$, $p \mapsto T_pK$ è liscia.
(2) Esiste un piano vettoriale $W \subset \mathbb{R}^3$ tale che la proiezione ortogonale $\pi\colon K \to W$ sia una immersione.

Esercizio 2.7. Costruisci un embedding esplicito della bottiglia di Klein K in $\mathbb{R}^n$, per qualche n.

Esercizio 2.8. Costruisci un embedding del toro n-dimensionale

$$S^1 \times \cdots \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

per ogni $n \geq 1$.

3. Esercizi del 14 marzo

Negli esercizi seguenti V è sempre uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Un elemento di $\mathcal{T}^k_h(V)$ è *puro* se può essere scritto come prodotto tensoriale di h vettori di V e k covettori di V^*.

Esercizio 3.1. Siano $v, v', w, w' \in V^*$ covettori non nulli.

(1) Se v e v' sono indipendenti, allora $v \otimes w$ e $v' \otimes w'$ sono vettori indipendenti in $\mathcal{T}^2(V)$.
(2) Se inoltre anche w e w' sono indipendenti, allora

$$v \otimes w + v' \otimes w' \in \mathcal{T}^2(V)$$

non è un elemento puro.

Esercizio 3.2. Considera l'isomorfismo canonico $\mathcal{T}^1_1(V) = \mathrm{Hom}(V, V)$. Mostra che questo isomorfismo manda gli elementi puri in tutti e soli gli omomorfismi di rango ≤ 1.

Esercizio 3.3. Siano $v^1, \ldots, v^k \in V^*$. Mostra che questi vettori sono indipendenti $\iff v^1 \wedge \cdots \wedge v^k \neq 0$.

I tre esercizi seguenti sono una introduzione alla *teoria di Hodge*.

Esercizio 3.4. Dato un elemento non nullo $\alpha \in \Lambda^k(V)$ con $k \leq n$, mostra che esiste sempre un $\beta \in \Lambda^{n-k}(V)$ tale che $\alpha \wedge \beta \neq 0$ in $\Lambda^n(V)$.

Deduci da questo fatto che la forma bilineare

$$\begin{aligned} \Lambda^k(V) \times \Lambda^{n-k}(V) &\longrightarrow \Lambda^n(V) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

è non-degenere, cioè che la mappa indotta

$$\begin{aligned} \Lambda^k(V) &\longrightarrow \mathrm{Hom}\big(\Lambda^{n-k}(V), \Lambda^n(V)\big) \\ \alpha &\longmapsto (\beta \mapsto \alpha \wedge \beta) \end{aligned}$$

è un isomorfismo. Nota che $\dim \Lambda^n(V) = 1$.

Esercizio 3.5. Sia $\langle , \rangle$ un prodotto scalare su V. Mostra che esiste un unico prodotto scalare $\langle , \rangle$ su $\Lambda^k(V)$ tale che

$$\langle v^1 \wedge \cdots \wedge v^k, w^1 \wedge \cdots \wedge w^k \rangle = \det \langle v^i, w^j \rangle$$

per qualsiasi scelta di covettori $v^1, \ldots, v^k, w^1, \ldots, w^k \in V^*$. Qui $\det\langle v^i, w^j \rangle$ indica il determinante della matrice $k \times k$ il cui elemento i, j è $\langle v^i, w^j \rangle$. Mostra che se il prodotto $\langle , \rangle$ su V è definito positivo allora anche quello indotto su $\Lambda^k(V)$ lo è.

Esercizio 3.6. Sia V dotato di un prodotto scalare definito positivo. Sia $\omega \in \Lambda^n(V)$ un generatore, normalizzato in modo che

$$\langle \omega, \omega \rangle = 1.$$

L'*operatore stella di Hodge* è la mappa lineare

$$*\colon \Lambda^k(V) \to \Lambda^{n-k}(V)$$

che manda $\beta \in \Lambda^k(V)$ nell'unico $*\beta \in \Lambda^{n-k}(V)$ per cui

$$\alpha \wedge (*\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle \omega$$

per ogni $\alpha \in \Lambda^k(V)$. Usando gli esercizi precedenti, mostra che

(1) La mappa $*$ è ben definita.
(2) Se $v^1, \ldots, v^n$ è una base positiva ortonormale per V^*, allora
$$*(v^1 \wedge \cdots \wedge v^k) = v^{k+1} \wedge \cdots \wedge v^n.$$
(3) La mappa $*$ è una isometria.
(4) Vale $**\beta = (-1)^{k(n-k)}\beta$ per ogni $\beta \in \Lambda^k(V)$.

4. Esercizi del 21 marzo

Esercizio 4.1. Ricordiamo che $\mathbb{RP}^n$ è l'insieme delle rette vettoriali l in $\mathbb{R}^{n+1}$. Considera l'insieme

$$E = \left\{ (l, v) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; v \in l \right\}.$$

Mostra che E è una sottovarietà liscia di $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ e che la mappa $E \to \mathbb{RP}^n$, $(l, v) \mapsto l$ è un fibrato vettoriale di rango 1 (detto *fibrato tautologico*).

Esercizio 4.2. Mostra che il fibrato tangente TM di una varietà M è sempre orientabile, anche se M non lo è.

Esercizio 4.3. Dimostra che esistono esattamente due fibrati vettoriali di rango 1 con base S^1 a meno di isomorfismi.

Esercizio 4.4. Sia $E \to M$ un fibrato vettoriale e $S \subset M$ un sottoinsieme chiuso. Mostra che ogni sezione parziale definita su S si estende ad una sezione globale su M (suggerimento: adatta la dimostrazione vista per le funzioni $S \to \mathbb{R}^k$).

Esercizio 4.5. Dimostra la identità di Jacobi: dati tre campi vettoriali X, Y, Z su una varietà M, vale

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \equiv 0.$$

Esercizio 4.6. Data una matrice quadrata A, sia X_A il campo vettoriale su $\mathbb{R}^n$ dato da $X_A(x) = Ax$. Mostra che

$$[X_A, X_B] = X_{BA-AB}.$$

Esercizio 4.7. Sia M una varietà, siano X, Y campi vettoriali su M e $f, g \in C^\infty(M)$. Mostra che

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

5. Esercizi del 28 marzo

Esercizio 5.1. Mostra che una distribuzione D di rango 1 in una varietà M è sempre integrabile.

Esercizio 5.2. Costruisci una foliazione sul toro $T = S^1 \times S^1$ che abbia sia foglie compatte che non compatte (cerca di descrivere la foliazione in modo rigoroso, non solo con un disegno).

Esercizio 5.3. Considera su $\mathbb{R}^3$, con coordinate (x_1, x_2, x_3), una generica distribuzione di piani

$$D_x = \left\{ a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \right\}.$$

Considera il campo $X = a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Mostra che la distribuzione è integrabile se e solo se

$$X \cdot \mathrm{rot} X = 0$$

in ogni punto. Qui $\mathrm{rot}X$ indica il rotore di X.

Esercizio 5.4. Mostra che gli unici sottogruppi di Lie connessi di SO(3) sono l'identità, SO(3), e i sottogruppi isomorfi a S^1 che descrivono le rotazioni intorno ad un asse.

Esercizio 5.5. Mostra che qualsiasi varietà non-orientabile M di dimensione n è contenuta in una varietà orientabile di dimensione $n+1$.

Esercizio 5.6. Sia $\pi \colon E \to M$ un fibrato vettoriale. Mostra che π è una equivalenza omotopica.

Esercizio 5.7. Sia M una varietà liscia e TM il suo fibrato tangente. Mostra che esiste sempre un fibrato vettoriale $E \to M$ tale che $TM \oplus E$ sia un fibrato vettoriale banale.

6. Esercizi dell' 11 aprile

Esercizio 6.1. Sia M una varietà con bordo e N una varietà senza bordo. Mostra che $M \times N$ ha una naturale struttura di varietà con bordo, e che $\partial(M \times N)$ è diffeomorfo a $\partial M \times N$.

Esercizio 6.2. Sia $\pi \colon E \to M$ un fibrato vettoriale. Sia g un tensore metrico su E (quindi $g(p)$ è un prodotto scalare definito positivo su E_p per ogni p). Mostra che

$$\{v \in E \mid \|v\| \leq 1\}$$

è un dominio regolare di E. Qui $\|v\| = \sqrt{g(p)(v, v)}$ dove $p = \pi(v)$.

Esercizio 6.3. Sia $f: M \to N$ una sommersione. Mostra che se $D \subset N$ è un dominio regolare allora $f^{-1}(D) \subset M$ è un dominio regolare.

Esercizio 6.4. Mostra che una n-varietà M è orientabile $\iff$ esiste una n-forma mai nulla su M.

Esercizio 6.5. Sia $f: M \to N$ una mappa liscia fra varietà. Siano $\omega \in \Omega^k(N)$ e $\eta \in \Omega^h(N)$. Dimostra che

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge g^*(\eta).$$

Esercizio 6.6. Sia M varietà qualsiasi e N varietà non orientabile. Il prodotto $M \times N$ può essere orientabile?

7. Esercizi del 18 aprile

Esercizio 7.1. Considera il toro $T = S^1 \times S^1$ con coordinate (θ^1, θ^2) definite a meno di $+2k\pi$ e la 1-forma $\omega = d\theta^1$. Considera la 1-sottovarietà $\gamma_i = \{\theta^i = 0\}$ per $i = 1, 2$, orientata come S^1. Mostra che

$$\int_{\gamma_1} \omega = 0, \qquad \int_{\gamma_2} \omega = 2\pi.$$

Esercizio 7.2. Sia M varietà orientata con tensore metrico g (non necessariamente definito positivo). La forma volume ω_g è definita dalla richiesta

$$\omega_g(p)(v_1, \ldots, v_n) = 1$$

per ogni base ortonormale $v_1, \ldots, v_n$ positiva di T_pM. Mostra che la definizione è ben posta.

Esercizio 7.3. Sia $f: U \to V$ una mappa liscia fra aperti $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$. Scriviamo $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Per non confonderci usiamo variabili diverse $(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ e $(y^1, \ldots, y^m) \in \mathbb{R}^m$. Mostra che

$$f^*(dx^i) = \frac{\partial f_i}{\partial y^j} dy^j = df_i.$$

Esercizio 7.4. Sia $\varphi: M \to N$ una mappa liscia fra varietà e $\omega \in \Omega^k(N)$. Otteniamo

$$d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega).$$

Suggerimento. Mostra il teorema nel caso in cui $\omega = f$ sia una funzione e nel caso in cui $\omega = dg$ sia il differenziale di una funzione. Deduci il caso generale dalle buone proprietà di d rispetto alle operazioni $+$ e $\wedge$. $\square$

Esercizio 7.5. Sia $\omega \in \Omega^1(M)$ una 1-forma su una varietà M senza bordo. Supponiamo che ω sia chiusa (cioè $d\omega = 0$) e mai nulla. Poiché $\omega(p) \neq 0$ per ogni $p \in M$, il funzionale $\omega(p): T_pM \to \mathbb{R}$ è non banale e possiamo definire la distribuzione di iperpiani:

$$D(p) = \ker \omega(p).$$

Mostra che D è integrabile e quindi tangente ad una foliazione su M.

Esercizio 7.6. Sia D una distribuzione di piani in una 3-varietà M senza bordo. Mostra che D è integrabile $\iff$ per ogni 1-forma α mai nulla definita su un aperto di M avente $\ker\alpha = D$ abbiamo $\alpha \wedge d\alpha = 0$.

Una *forma simplettica* su una varietà N è una 2-forma $\omega \in \Omega^2(M)$ che è chiusa (cioè $d\omega = 0$) e *non-degenere*, cioè per ogni $p \in M$ e per ogni $v \in T_pM$ esiste $w \in T_pM$ tale che $\omega(p)(v, w) \neq 0$.

Esercizio 7.7. Mostra i fatti seguenti:

(1) Se ω è una forma simplettica su N, allora N ha dimensione pari.
(2) Costruisci una forma simplettica su $\mathbb{R}^{2n}$.
(3) Sia $\pi\colon T^*M \to M$ il fibrato cotangente di una varietà M di dimensione n. Nota che T^*M è una varietà di dimensione $2n$. La *1-forma tautologica* $\theta \in \Omega^1(T^*M)$ sulla varietà T^*M è definita nel modo seguente: un punto $\alpha \in T^*M$ è per definizione un funzionale $\alpha\colon T_pM \to \mathbb{R}$ con $p = \pi(\alpha)$. Sia $v \in T_\alpha(T^*M)$. Poniamo
$$\theta(\alpha)(v) = \alpha(d\pi_\alpha(v)).$$
Mostra che $d\theta$ è una forma simplettica su T^*M.

8. Esercizi del 2 maggio

Sia M una varietà di dimensione n con tutti i numeri di Betti finiti. La *caratteristica di Eulero – Poincaré* è il numero intero
$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i b^i(M).$$

Esercizio 8.1. Mostra che per qualsiasi successione esatta di spazi vettoriali finito dimensionali
$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_{k-1}} V_k \longrightarrow 0$$
vale la relazione
$$\sum_{i=1}^{k} (-1)^i \dim V_i = 0.$$
Deduci il fatto seguente. Sia $M = U \cup V$ varietà con U, V aperti. Supponiamo che i numberi di Betti di $U \cap V, U, V, M$ siano tutti finiti. Allora
$$\chi(M) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V).$$

Esercizio 8.2. Calcola i numeri di Betti della superficie ottenuta togliendo k punti a S^2.

Esercizio 8.3. Dimostra che la superficie $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ha $b^1 = \infty$.

Esercizio 8.4. Sia $K \subset S^3$ un nodo. Mostra che $H^1(S^3 \setminus K) \cong \mathbb{R}$.

Esercizio 8.5. Sia $\pi\colon E \to M$ una fibrazione con fibra F. Mostra che se la fibrazione ha una sezione allora $\pi^*\colon H^k(M) \to H^k(E)$ è iniettivo. Deduci che la *fibrazione di Hopf*

$$\pi\colon S^3 \to \mathbb{CP}^1 \cong S^2, \quad \pi(z,w) = [z,w]$$

non ha sezioni. Qui $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ è definito come $S^3 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid \|z\|^2 + \|w\|^2 = 1\}$. Puoi dare per buono il fatto che π sia effettivamente una fibrazione.

Esercizio 8.6. Sia M una varietà connessa e $p \in M$ un punto. Costruisci un morfismo iniettivo di spazi vettoriali

$$H^1(M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\pi_1(M,p), \mathbb{R}).$$

Deduci che se M è semplicemente connessa allora $b^1(M) = 0$.

(Nota: in realtà il morfismo viene un isomorfismo, ma la suriettività è più difficile da dimostrare.)

Esercizio 8.7. Sia ω una forma simplettica su una varietà N. Mostra che esiste un'orientazione per N tale che $\omega \wedge \cdots \wedge \omega$ sia una forma volume su N.

9. Esercizi del 9 maggio

Esercizio 9.1. Sia M una n-varietà connessa, compatta, orientata e senza bordo. Sia N ottenuta da M rimuovendo un punto. Dimostra le uguaglianze seguenti:

$$\begin{aligned} b^i(N) &= b^i(M) \quad \forall i \leq n-1, \\ b^n(N) &= b^n(M) - 1. \end{aligned}$$

Esercizio 9.2. Sia $M\#N$ la somma connessa di due varietà connesse, orientate, compatte e senza bordo. Dimostra le uguaglianze seguenti:

$$\begin{aligned} &b^i(M\#N) = 1 \quad \text{se } i = 0, n, \\ &b^i(M\#N) = b^i(M) + b^i(N) \quad \text{se } 0 < i < n. \end{aligned}$$

Puoi usare l'esercizio precedente. Deduci che i numeri di Betti della superficie S_g di genere g sono

$$b^0(S_g) = 1, \qquad b^1(S_g) = 2g, \qquad b^2(S_g) = 1$$

e quindi $\chi(S_g) = 2 - 2g$.

Esercizio 9.3. Sia $S \subset \mathbb{CP}^n$ un sottospazio proiettivo di dimensione complessa $k \leq n$. Mostra che la mappa $i^*\colon H^{2k}(\mathbb{CP}^n) \to H^{2k}(S)$ è un isomorfismo.

Esercizio 9.4. Sia $T = S^1 \times S^1$ il toro e $p \in T$ un punto. Considera la 4-varietà $M = T \times T$ e le sottovarietà $N_1 = T \times \{p\}$ e $N_2 = \{p\} \times T$. Calcola i gruppi di coomologia di

$$X = M \setminus (N_1 \cup N_2).$$

Esercizio 9.5. Siano M e N varietà con coomologia finito-dimensionale. Dimostra che
$$\chi(M \times N) = \chi(M) \cdot \chi(N).$$

Esercizio 9.6. Sia M una varietà connessa senza bordo. Sia $N \subset M$ una ipersuperficie senza bordo connessa chiusa. Mostra che $M \setminus N$ ha una o due componenti connesse. Descrivi degli esempi in entrambi i casi. Mostra che se M è orientabile e N non è orientabile allora $M \setminus N$ è connessa.

Esercizio 9.7. Sia V spazio vettoriale reale di dimensione n. Sia $\alpha \in \Lambda^n(V)$ non nullo. Mostra che per ogni $\beta \in \Lambda^{n-1}(V)$ esiste un unico $v \in V$ tale che la contrazione $\iota_v(\alpha)$ di α con v sia β.

Esercizio 9.8. Sia M una varietà compatta, senza bordo, connessa, orientata. Date due forme volume $\omega, \eta \in \Omega^n(M)$, mostra che esiste un diffeomorfismo $\varphi\colon M \to N$ isotopo all'identità tale che $\varphi^*(\omega) = \eta$ se e solo se $\int_M \omega = \int_M \eta$. L'implicazione difficile è l'esistenza di φ, che si fa secondo questi passi:

(1) Mostra che esiste $\beta \in \Omega^{n-1}(M)$ tale che $\omega - \eta = d\beta$.
(2) Mostra che $\omega_t = \eta + td\beta$ è una forma volume per ogni $t \in [0, 1]$.
(3) Mostra che per ogni $t \in [0, 1]$ esiste un unico $X_t \in \mathfrak{X}(M)$ tale che $\iota_{X_t}(\omega_t) = \beta$. Diamo per buono che X_t dipende in modo liscio da t.
(4) Mostra che $\mathcal{L}_{X_t}(\omega_t) = \frac{d}{dt}\omega_t$.
(5) Mostra che esiste una famiglia liscia $\varphi_t\colon M \to M$ di diffeomorfismi tali che $\varphi_t^*(\omega_t) = \omega_0$.

10. Esercizi del 16 maggio

Esercizio 10.1. Considera lo spazio iperbolico nel modello del semispazio:
$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}, \quad g(x) = \frac{1}{x_n^2} g^E(x).$$
Qui g^E è il tensore euclideo. Mostra che le mappe seguenti sono isometrie per la varietà riemanniana H^n:

- $f(x) = x + b$, con $b = (b_1, \ldots, b_{n-1}, 0)$;
- $f(x) = \lambda x$ con $\lambda > 0$.

Deduci che il gruppo di isometrie $\mathrm{Isom}(H^n)$ di H^n agisce transitivamente sulla varietà riemanniana H^n.

Esercizio 10.2. Considera il piano iperbolico nel modello del semipiano:
$$H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \quad g = \frac{1}{y^2} g^E.$$
Calcola l'area del dominio
$$[-a, a] \times [b, \infty)$$
per ogni $a, b > 0$. L'area è ovviamente quella indotta dalla forma volume della varietà riemanniana H^2.

Esercizio 10.3. Identifichiamo $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ e scriviamo il modello del sempiano del piano iperbolico come $H^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$. Mostra che le trasformazioni di Möbius

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $\det \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) > 0$ sono tutte isometrie di H^2 che preservano l'orientazione.

Esercizio 10.4. Costruisci delle metriche Lorentziane tempo-orientabili e tempo-non orientabili sia sul cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ che sul nastro di Möbius. Scrivi le metriche in modo rigoroso (non basta un disegno).

Esercizio 10.5. Considera lo spazio di Minkowski $\mathbb{R}^{n,1}$, cioè la varietà $\mathbb{R}^{n+1}$ con tensore metrico costante $\eta(x, y) = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_{n+1} y_{n+1}$ in ogni punto. Lo *spazio De Sitter* è l'iperboloide ad una falda

$$S = \{x \in \mathbb{R}^{n,1},\ \langle x, x\rangle = 1\}.$$

Mostra che S è una sottovarietà pseudo-Riemanniana di $\mathbb{R}^{n,1}$ e calcolane la segnatura.

Esercizio 10.6. Considera lo spazio $\mathbb{R}^{n,2}$, cioè la varietà $\mathbb{R}^{n+2}$ con tensore metrico costante $\eta(x, y) = -x_1 y_1 - x_2 y_2 + x_3 y_3 + \cdots + x_{n+1} y_{n+1}$ in ogni punto. Lo *spazio anti De Sitter* è la quadrica

$$S = \{x \in \mathbb{R}^{n,2},\ \langle x, x\rangle = -1\}.$$

Mostra che S è una sottovarietà pseudo-Riemanniana di $\mathbb{R}^{2,n}$ e calcolane la segnatura.

Esercizio 10.7. Sia G un gruppo di Lie. Mostra che esiste sempre una metrica riemanniana su G invariante a sinistra, cioè tale che $L_g \colon G \to G$ sia un'isometria per ogni $g \in G$.

Esercizio 10.8. Costruisci una connessione su una varietà che non è compatibile con nessuna metrica Riemanniana.

11. Esercizi del 23 maggio

Esercizio 11.1. Sia $H^2 = \{y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ il piano iperbolico definito con il modello del semipiano. Sia $v_0 = (0, 1)$ punto tangente nel punto $(0, 1) \in H^2$. Sia v_t il trasporto parallelo di v_0 lungo la curva $\gamma(t) = (t, 1)$. Calcola l'angolo fra v_t e l'asse delle ordinate (il risultato dipende da t).

Esercizio 11.2. Scrivi la metrica euclidea g su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ usando coordinate polari (θ, ρ) e determina i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita rispetto a queste variabili θ, ρ.

Esercizio 11.3. Sia M una varietà pseudo-Riemanniana connessa. Sia $p \in M$ un punto. Il *gruppo di olonomia* di M in p è il sottoinsieme

$$H_p = \left\{\Gamma(\gamma)_{t_0}^{t_1}\right\} \subset \mathrm{O}(T_pM, g(p))$$

ottenuto al variare di tutte le curve $\gamma\colon I \to M$ con $t_0 < t_1$ contenuti in I e tali che $\gamma(t_0) = \gamma(t_1) = p$. Mostra che H_p è effettivamente un sottogruppo. Mostra che se $p, q \in M$ allora H_p e H_q sono isomorfi. Determina il tipo di isomorfismo di H_p per $M = \mathbb{R}^n$ e $M = S^2$.

Esercizio 11.4. Considera la connessione ∇ su $\mathbb{R}^3$ con simboli di Christoffel

$$\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{31}^2 = 1$$
$$\Gamma_{21}^3 = \Gamma_{32}^1 = \Gamma_{13}^2 = -1$$

e tutti gli altri simboli di Christoffel nulli. Mostra che questa connessione è compatibile con il tensore metrico euclideo g, ma non è simmetrica. Quali sono le geodetiche?

Esercizio 11.5. Considera il modello del disco dello spazio iperbolico (B^n, g),

$$g(x) = \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2}\right)^2 g^E(x)$$

dove g^E è il tensore metrico euclideo. Sia $v \in S^{n-1}$. Mostra che la geodetica massimale passante per l'origine in direzione v è

$$\gamma(t) = \tanh t \cdot v = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} v.$$

Esercizio 11.6. Considera il modello dell'iperboloide $I^n \subset \mathbb{R}^{n,1}$ dello spazio iperbolico. Mostra che per ogni $p, q \in I^n$ vale l'uguaglianza

$$\cosh d(p, q) = -\langle p, q\rangle.$$

Esercizio 11.7. Ricorda che la differenza $D = \nabla - \nabla'$ fra due connessioni ∇, ∇' su M è interpretabile come un campo tensoriale di tipo $(1, 2)$. Mostra che ∇ e ∇' hanno le stesse geodetiche $\Longleftrightarrow$ D è un tensore antisimmetrico.[1] Deduci che:

(1) $\nabla = \nabla' \Longleftrightarrow$ hanno le stesse geodetiche e la stessa torsione.
(2) Per ogni ∇ esiste un'unica connessione ∇' con le stesse geodetiche di ∇ e con torsione nulla.

Hint. Dimostra che D è antisimmetrico $\Longleftrightarrow D(X, X) = 0$ per ogni campo X $\Longleftrightarrow \nabla'_X X = \nabla_X X$ per ogni campo $X \Longleftrightarrow$ hanno le stesse geodetiche. $\square$

Esercizio 11.8. (Difficile, cerca informazioni in rete.) Sia G un gruppo di Lie compatto. Mostra che esiste sempre una metrica riemanniana su G *biinvariante*, cioè tale che L_g e R_g siano entrambe isometrie per ogni $g \in G$.

[1] Cioè per ogni $p \in M$ la mappa $D(p)\colon T_pM \times T_pM \to T_pM$ è antisimmetrica, cioè $D(p)(v, w) = -D(p)(w, v)$. In coordinate: $D_{ij}^k = -D_{ji}^k$.

12. Esercizi del 30 maggio

Esercizio 12.1. Un *frame* su una varietà pseudo-Riemanniana M è il dato di un punto $p \in M$ e di una base ortonormale $v_1, \ldots, v_n$ per T_pM. Mostra che le isometrie di $\mathbb{R}^n$, S^n e H^n agiscono transitivamente sui frame.

Esercizio 12.2 (Il toro di Clifton – Pohl)**.** Considera la varietà $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dotata della metrica Lorentziana

$$g(x, y) = \frac{2}{x^2 + y^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ogni mappa $f(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ è una isometria per questa metrica. In particolare possiamo quozientare M con l'isometria $f(x, y) = (2x, 2y)$ e ottenere una superficie T diffeomorfa ad un toro. La struttura Lorentziana su M ne induce una su T. Dimostra che le curve

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{1-t}, 0\right), \qquad \eta(t) = (\tan(t), 1)$$

sono entrambe geodetiche massimali definite su $(-\infty, 1)$ e $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Quindi T è compatta ma non geodeticamente completa (questo fatto è impossibile nelle varietà Riemanniane per Hopf – Rinow).

Una *isometria locale* fra varietà pseudo-Riemanniane è una $f : M \to N$ tale che per ogni $p \in M$ esistono intorni aperti $U(p)$ e $V(f(p))$ tali che $f(U) = V$ e $f|_U : U \to V$ sia un'isometria.

Una varietà pseudo-Riemanniana connessa M è *omogenea* se per ogni coppia di punti $p, q \in M$ esiste una isometria f di M tale che $f(p) = q$. La varietà M è *isotropa* in $p \in M$ se per ogni coppia di vettori $v, w \in T_pM$ con $\langle v, v\rangle = \langle w, w\rangle$ esiste una isometria f di M tale che $f(p) = p$ e $df_p(v) = w$.

Esercizio 12.3. Mostra che una varietà riemanniana omogenea è sempre completa.

Esercizio 12.4. Sia $f : M \to N$ una isometria locale fra varietà riemanniane connesse. Mostra che se M è completa, allora f è un rivestimento.

Esercizio 12.5. Sia $f : M \to N$ una isometria locale fra varietà riemanniane connesse che è anche un rivestimento. Mostra che M è completa $\iff$ N è completa.

Esercizio 12.6. Mostra che una varietà riemanniana completa che è isotropa in ogni suo punto è anche omogenea.

Esercizio 12.7. Dimostra che S^n ha curvatura sezionale costante $+1$, usando solo teoremi dimostrati a lezione.

Esercizio 12.8. Sia $R > 0$. Considera la varietà $M = \mathbb{R} \times (R, +\infty) \times S^2$, con variabili t, r, θ, ϕ, dotata del tensore metrico lorentziano di Schwarzschild

$$g = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{R}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Mostra che il tensore di Ricci è nullo in ogni punto di M, ma il tensore di Riemann no. Questa è la metrica che descrive lo spaziotempo intorno ad una stella o ad un buco nero non carico e non ruotante: il tensore di Ricci è nullo perché lontano dal centro non c'è massa, ma il tensore di Riemann non è nullo, perché lo spaziotempo è comunque curvo anche dove non c'è massa.

Esercizio 12.9. Se hai fatto l'Esercizio 11.2, calcola il tensore di Riemann in coordinate polari (sai già che valori devono uscire?).