ISTITUZIONI DI GEOMETRIA 2019/20 - ESERCIZI SETTIMANALI

È sempre lecito e consigliato usare un enunciato degli esercizi precedenti per risolvere un esercizio, anche se non è stato risolto.

1. Esercizi del 29 febbraio

Esercizio 1.1. Costruisci due atlanti lisci non compatibili su $\mathbb{R}$. Mostra che le due varietà lisce che ne risultano sono però diffeomorfe.

(Nota: Per teoremi profondi, due strutture lisce sulla stessa varietà topologica di dimensione $n \leq 3$ sono sempre diffeomorfe. Questo fatto spesso non è vero in dimensione $n \geq 4$.)

Esercizio 1.2. Siano M e N due varietà topologiche e $f\colon M \to N$ un omeomorfismo. Data una struttura liscia su N, esiste un'unica struttura liscia su M tale che f sia un diffeomorfismo.

Esercizio 1.3. Concludi la dimostrazione che la mappa $\mathbb{CP}^1 \to S^2$ costruita a lezione è un diffeomorfismo verificando che nella carta oppurtuna è del tipo

$$[z,1] \longmapsto \frac{1}{1+4|z|^2}\left(4\Re z, -4\Im z, 1-4|z|^2\right).$$

(Nota: il fattore 4 può scomparire se si cambia tipo di proiezione stereografica.)

Esercizio 1.4. Sia $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ polinomio di grado $d \geq 1$. Considera l'insieme $S = \{z \mid p'(z) = 0\}$. Mostra che la mappa

$$\begin{aligned} p : \mathbb{C} \setminus p^{-1}(p(S)) &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus p(S) \\ z &\longmapsto p(z) \end{aligned}$$

è un rivestimento liscio di grado d.

Esercizio 1.5. Considera il gruppo $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ generato da

$$f(x,y) = (x+1, y), \qquad g(x,y) = (-x, y+1).$$

Mostra che Γ agisce in modo libero e propriamente discontinuo, e che il quadrato Q di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$ è un dominio fondamentale.

Esercizio 1.6. Considera il gruppo $\Gamma < \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2)$ generato da

$$f(x,y) = \left(2x, \tfrac{1}{2}y\right).$$

Mostra che Γ non agisce in modo propriamente discontinuo sulla varietà $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Mostra che la mappa $M \to M/_\Gamma$ è comunque un rivestimento, ed il quoziente $M/_\Gamma$ è una superficie non di Hausdorff (ogni punto ha un intorno omeomorfo a $\mathbb{R}^2$, ma non è di Hausdorff!).

Esercizio 1.7. Considera il gruppo Γ di traslazioni di $\mathbb{C}$ generato da

$$\gamma(z) = z + 1, \qquad \gamma(z) = z + e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

Costruisci un dominio fondamentale per Γ che è un esagono regolare.

Esercizio 1.8. Considera il gruppo $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ generato da:

$$f(x, y, z) = (x + 1, y, z), \qquad g(x, y, z) = (x, y + 1, z),$$
$$h(x, y, z) = (-x, -y, z + 1).$$

Mostra che l'azione è libera e propriamente discontinua e che la varietà $\mathbb{R}^3/_{\Gamma}$ è compatta ed orientabile ma non omeomorfa al 3-toro. Mostra che questa varietà ha un rivestimento doppio diffeomorfo al 3-toro.

2. Esercizi del 14 marzo

Esercizio 2.1. Mostra che una immersione iniettiva propria è un embedding.

Esercizio 2.2. Sia $S \subset M$ una sottovarietà liscia. Mostra che la mappa inclusione $i\colon S \hookrightarrow M$ è un embedding. Mostra che i è propria se e solo se S è un sottoinsieme chiuso.

Esercizio 2.3. Sia $M \subset N$ una sottovarietà liscia e $S \subset M$ una sottovarietà liscia. Mostra che $S \subset N$ è una sottovarietà liscia.

Esercizio 2.4. Mostra che una sommersione è sempre una mappa aperta. Deduci che se M è compatta allora non esistono sommersioni $M \to \mathbb{R}^k$ per nessun k.

Esercizio 2.5. Costruisci un embedding esplicito della bottiglia di Klein K in $\mathbb{R}^n$, per qualche n.

Esercizio 2.6. Costruisci un embedding del toro n-dimensionale

$$S^1 \times \cdots \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 2.7. Siano U, V, W spazi vettoriali. Mostra che esiste un isomorfismo canonico tra gli spazi vettoriali

$$\mathrm{Mult}(U, V; W), \qquad \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, W)).$$

Esercizio 2.8. Siano $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$ e $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$ vettori non nulli.

(1) Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ sono indipendenti, allora $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ e $\mathbf{v}' \otimes \mathbf{w}'$ lo sono.
(2) Se inoltre anche $\mathbf{w}$ e $\mathbf{w}'$ sono indipendenti, allora

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} + \mathbf{v}' \otimes \mathbf{w}' \in V \otimes W$$

non è un elemento puro.

Esercizio 2.9. Considera l'isomorfismo canonico $V^* \otimes W \cong \mathrm{Hom}(V, W)$. Mostra che tramite questo isomorfismo gli elementi puri sono mandati precisamente negli omomorfismi di rango ≤ 1.

3. Esercizi del 21 marzo

Esercizio 3.1. Sia g un prodotto scalare su V, che induce un prodotto scalare su ciascun spazio tensoriale $\mathcal{T}_h^k(V)$.

(1) Se $\mathcal{B}$ è una base ortonormale per V, allora anche la base indotta da $\mathcal{B}$ per $\mathcal{T}_h^k(V)$ è ortonormale.
(2) Se g è definito positivo su V, anche il prodotto scalare indotto su $\mathcal{T}_h^k(V)$ è definito positivo.

Esercizio 3.2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Dato un elemento non nullo $\alpha \in \Lambda^k(V)$ con $k \leq n$, mostra che esiste sempre un $\beta \in \Lambda^{n-k}(V)$ tale che $\alpha \wedge \beta \neq 0$ in $\Lambda^n(V)$.

Deduci da questo fatto che la forma bilineare

$$\begin{aligned} \Lambda^k(V) \times \Lambda^{n-k}(V) &\longrightarrow \Lambda^n(V) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

è non-degenere, cioè che la mappa indotta

$$\begin{aligned} \Lambda^k(V) &\longrightarrow \mathrm{Hom}\big(\Lambda^{n-k}(V), \Lambda^n(V)\big) \\ \alpha &\longmapsto (\beta \mapsto \alpha \wedge \beta) \end{aligned}$$

è un isomorfismo.

Esercizio 3.3. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita dotato di un prodotto scalare. Siano $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k, \mathbf{w}^1, \ldots, \mathbf{w}^k \in V^*$ covettori qualsiasi. Considera gli elementi seguenti in $\mathcal{T}^k(V)$:

$$\alpha = \mathbf{v}^1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}^k, \qquad \beta = \mathbf{w}^1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{w}^k,$$
$$\gamma = \mathbf{v}^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}^k, \qquad \delta = \mathbf{w}^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{w}^k.$$

Ricordiamo che il prodotto scalare su V ne induce uno in V^* e $\mathcal{T}^k(V)$. Dimostra che i loro prodotti scalari sono:

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta \rangle &= \langle \mathbf{v}^1, \mathbf{w}^1 \rangle \cdots \langle \mathbf{v}^k, \mathbf{w}^k \rangle, \\ \langle \gamma, \delta \rangle &= k! \det \langle \mathbf{v}^i, \mathbf{w}^j \rangle. \end{aligned}$$

Esercizio 3.4. Sia V uno spazio vettoriale orientato di dimensione finita dotato di un prodotto scalare. Questo induce un prodotto scalare $\langle , \rangle$ su $\Lambda^k(V)$. Definiamo un nuovo prodotto scalare rinormalizzato

$$\langle \alpha, \beta \rangle_N = \frac{1}{k!} \langle \alpha, \beta \rangle$$

su $\Lambda^k(V)$, per ogni k. In questo modo otteniamo (con le notazioni dell'esercizio precedente) l'uguaglianza più comoda:

$$\langle \gamma, \delta \rangle_N = \det \langle \mathbf{v}^i, \mathbf{w}^j \rangle.$$

Sia $\omega \in \Lambda^n(V)$ il generatore determinato dal prodotto scalare su V. Nota che

$$\langle \omega, \omega \rangle_N = 1$$

con la nuova rinormalizzazione. L'*operatore stella di Hodge* è la mappa lineare

$$*\colon \Lambda^k(V) \to \Lambda^{n-k}(V)$$

che manda $\beta \in \Lambda^k(V)$ nell'unico $*\beta \in \Lambda^{n-k}(V)$ per cui

$$\alpha \wedge (*\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle_N \omega$$

per ogni $\alpha \in \Lambda^k(V)$. Usando gli esercizi precedenti, mostra che

(1) La mappa è ben definita.
(2) Se $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n$ è una base positiva ortonormale per V^*, allora
$$*(\mathbf{v}^1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}^k) = \mathbf{v}^{k+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}^n.$$
(3) La mappa $*$ è una isometria (rispetto al prodotto scalare $\langle , \rangle_N$).
(4) Vale $**\beta = (-1)^{k(n-k)}\beta$ per ogni $\beta \in \Lambda^k(V)$.

Esercizio 3.5. Ricordiamo che $\mathbb{RP}^n$ è l'insieme delle rette vettoriali l in $\mathbb{R}^{n+1}$. Considera l'insieme

$$E = \big\{(l, v) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \bigm| v \in l\big\}.$$

Mostra che E è una sottovarietà liscia di $\mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ e che la mappa $E \to \mathbb{RP}^n$, $(l, v) \mapsto l$ è un fibrato vettoriale di rango 1 (detto *fibrato tautologico*).

Esercizio 3.6. Mostra che il fibrato tangente TK della bottiglia di Klein K ha una sezione mai nulla ma non ha un frame.

Esercizio 3.7. Mostra che il fibrato tangente TM di una varietà M è sempre orientabile, anche se M non lo è.

Esercizio 3.8. Dimostra che esistono esattamente due fibrati vettoriali di rango 1 con base S^1 a meno di isomorfismi.

Esercizio 3.9. Costruisci un fibrato $E \to K$ con fibra $F = S^1$ sopra la bottiglia di Klein K, tale che E sia una 3-varietà compatta orientabile (consiglio: puoi usare un esercizio della prima settimana).

Esercizio 3.10. Sia $E \to M$ un fibrato vettoriale e $S \subset M$ un sottoinsieme chiuso. Mostra che ogni sezione parziale definita su S si estende ad una sezione globale su M (suggerimento: adatta la dimostrazione vista per le funzioni $S \to \mathbb{R}^k$).

4. Esercizi del 28 marzo

Esercizio 4.1. Mostra che qualsiasi varietà non-orientabile M di dimensione n è contenuta in una varietà orientabile di dimensione $n+1$.

Esercizio 4.2. Data una matrice quadrata A, sia X_A il campo vettoriale su $\mathbb{R}^n$ dato da $X_A(x) = Ax$. Mostra che

$$[X_A, X_B] = X_{BA-AB}.$$

Esercizio 4.3. Dimostra la identità di Jacobi: dati tre campi vettoriali X, Y, Z su una varietà M, vale

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] \equiv 0.$$

Esercizio 4.4. Sia M una varietà, siano X, Y campi vettoriali su M e $f, g \in C^\infty(M)$. Mostra che

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

Esercizio 4.5. Costruisci una foliazione sul toro $T = S^1 \times S^1$ che abbia contemporaneamente foglie compatte e non compatte (non basta un disegno: descrivi la foliazione in modo rigoroso).

Esercizio 4.6. Mostra che gli unici sottogruppi di Lie connessi di SO(3) sono l'identità, SO(3), e i sottogruppi isomorfi a S^1 che descrivono le rotazioni intorno ad un asse.

Esercizio 4.7. Sia D una distribuzione di rango k su una varietà M. Mostra che D è integrabile se e solo se vale il fatto seguente: per ogni $p \in M$ esiste una sottovarietà $S \subset M$ di dimensione k contenente p tale che per ogni $q \in S$ vale $T_qS = D_q$.

Esercizio 4.8. Sia G un gruppo di Lie e $H < G$ un sottogruppo di Lie connesso. Mostra che H è normale in G se e solo se la corrispettiva sottoalgebra $\mathfrak{h}$ è un ideale.

Esercizio 4.9. Mostra che ciascuno spazio lenticolare $L(p, q)$ ammette una foliazione in cerchi (cioè una foliazione di rango 1 con foglie tutte compatte).

Esercizio 4.10. Considera $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$. Per ogni $p = (z_1, z_2) \in S^3$, prendiamo la retta complessa

$$r_p = \left\{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; w_1\bar{z}_1 + w_2\bar{z}_2 = 0\right\}.$$

(1) Mostra che $r_p \subset T_pS^3$. Quindi $\{r_p\}_{p\in S^3}$ è una distribuzione di rango due in S^3, detta *distribuzione di Hopf*.
(2) Questa distribuzione è integrabile?

5. Esercizi del 4 aprile

Esercizio 5.1. Mostra che una superficie orientabile che ammette un campo di vettori mai nulli è sempre parallelizzabile.

Esercizio 5.2. Mostra che due embedding $f, g\colon \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ sono sempre isotopi.

Esercizio 5.3. Sia $E \to M$ un fibrato. Mostra che una sottovarietà $S \subset E$ è immagine di una sezione $\Longleftrightarrow$ interseca trasversalmente ogni fibra in un punto.

Una proprietà P di una funzione liscia $f\colon M \to N$ è *stabile* se per ogni omotopia liscia $f_t\colon M \to N$, $t \in [0, 1]$, con $f_0 = f$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che tutte le funzioni f_t con $t < \varepsilon$ abbiano la proprietà P.

Esercizio 5.4. Sia M compatta e $f\colon M \to N$ una funzione liscia. Mostra che le seguenti sono proprietà stabili per f:

- f è una immersione,
- f è una sommersione,
- f è trasversa ad una fissata sottovarietà chiusa $W \subset N$.

Esercizio 5.5. Sia $f\colon S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ un nodo (cioè un embedding liscio). Mostra che esiste un piano affine $P \subset \mathbb{R}^3$ tale che $\pi \circ f\colon S^1 \hookrightarrow P$ sia un'immersione, dove π è la proiezione ortogonale su P.

Esercizio 5.6. Siano M e N due varietà connesse orientate senza bordo di dimensione $n \geq 3$. Mostra che

$$\pi_1(M\#N) \cong \pi_1(M) * \pi_1(N)$$

dove $*$ indica il prodotto libero di gruppi (cerca la definizione in rete se non la conosci).

Esercizio 5.7. Siano X, Y campi vettoriali in una varietà M. Mostra che

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X,Y]}.$$

Questa è un'uguaglianza fra operatori su $\Gamma(\mathcal{T}^h_k(M))$. Il bracket $[A, B]$ di due operatori A, B è per definizione $[A, B] = AB - BA$. Nota che se $(h, k) = (1, 0)$ questo è equivalente all'identià di Jacobi sui campi vettoriali.

6. Esercizi dell'11 aprile

Esercizio 6.1. Mostra che una n-varietà M è orientabile $\Longleftrightarrow$ esiste una n-forma mai nulla su M.

Esercizio 6.2. Considera il toro $T = S^1 \times S^1$ con coordinate (θ^1, θ^2) e la 1-forma $\omega = d\theta^1$. Considera la 1-sottovarietà $\gamma_i = \{\theta^i = 0\}$ per $i = 1, 2$, orientata come S^1. Mostra che

$$\int_{\gamma_1} \omega = 0, \qquad \int_{\gamma_2} \omega = 2\pi.$$

Esercizio 6.3. Sia $f\colon U \to V$ una mappa liscia fra aperti $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$. Scriviamo $f = (f_1, \dots, f_n)$. Per non confonderci usiamo variabili diverse $(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ e $(y^1, \dots, y^m) \in \mathbb{R}^m$. Mostra che

$$f^*(dx^i) = \frac{\partial f_i}{\partial y^j} dy^j = df_i.$$

Esercizio 6.4. Sia N una m-varietà senza bordo. Se $\varphi\colon M \to N$ è una mappa liscia e $\omega \in \Omega^k(N)$, otteniamo

$$d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega).$$

Suggerimento. Mostra il teorema nel caso in cui $\omega = f$ sia una funzione e nel caso in cui $\omega = dg$ sia il differenziale di una funzione. Deduci il caso generale dalle buone proprietà di d rispetto alle operazioni $+$ e $\wedge$. $\square$

Esercizio 6.5. Sia $\omega \in \Omega^1(M)$ una 1-forma su M chiusa (cioè tale che $d\omega = 0$) e mai nulla. Poiché $\omega(p) \neq 0$ per ogni $p \in M$, il funzionale $\omega(p)\colon T_pM \to \mathbb{R}$ è non banale e possiamo definire la distribuzione di iperpiani:

$$D(p) = \ker \omega(p).$$

Mostra che D è integrabile e quindi tangente ad una foliazione su M, univocamente determinata da ω.

Esercizio 6.6. Sia X un campo vettoriale su M. Mostra che la contrazione

$$\iota_X \colon \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k-1}(M)$$

è l'unica applicazione lineare che soddisfa le proprietà seguenti per ogni k:

(1) Se $k = 1$, allora $\iota_X(\omega) = \omega(X)$;
(2) $\iota_X(\omega\wedge\eta) = \iota_X(\omega)\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge\iota_X(\eta)$ per qualsiasi forme differenziali $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\eta \in \Omega^h(M)$.

Esercizio 6.7. Sia D una distribuzione di piani in una 3-varietà M senza bordo. Mostra che D è integrabile $\iff$ per ogni 1-forma α mai nulla definita su un aperto di M avente $\ker \alpha = D$ abbiamo $\alpha \wedge d\alpha = 0$.

7. Esercizi del 25 aprile

Esercizio 7.1. Sia $E \to M$ un fibrato vettoriale. Mostra che le due varietà E e M sono omotopicamente equivalenti.

Esercizio 7.2. Mostra che per qualsiasi successione esatta di spazi vettoriali finito dimensionali

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{k-1}} V_k \longrightarrow 0$$

vale la relazione

$$\sum_{i=1}^{k}(-1)^i \dim V_i = 0.$$

Esercizio 7.3. Sia M una n-varietà connessa, compatta, orientata e senza bordo. Sia N ottenuta da M rimuovendo un punto. Dimostra le uguaglianze seguenti:

$$b^i(N) = b^i(M) \quad \forall i \leq n-1,$$
$$b^n(N) = b^n(M) - 1.$$

Suggerimento. Usa Mayer – Vietoris con $M = U \cup V$, $U = N$, e V palla aperta contenente il punto rimosso. □

Esercizio 7.4. Sia $M\#N$ la somma connessa di due varietà connesse, orientate, compatte e senza bordo. Dimostra le uguaglianze seguenti:

$$b^i(M\#N) = 1 \quad \text{se } i = 0, n,$$
$$b^i(M\#N) = b^i(M) + b^i(N) \quad \text{se } 0 < i < n.$$

Puoi usare l'esercizio precedente. Deduci che i numeri di Betti della superficie S_g di genere g sono

$$b^0(S_g) = 1, \qquad b^1(S_g) = 2g, \qquad b^2(S_g) = 1.$$

Esercizio 7.5. Calcola i numeri di Betti della varietà M ottenuta da $\mathbb{R}^3$ rimuovendo gli assi x e y.

Esercizio 7.6. Dimostra che la superficie $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ ha $b^1 = \infty$.

Esercizio 7.7. Sia $K \subset S^3$ un nodo. Mostra che $H^1(S^3 \setminus K) \cong \mathbb{R}$.

8. Esercizi del 2 maggio

Esercizio 8.1. Dimostra il Lemma dei 5.

Nel prossimo esercizio, potete usare che la coomologia di De Rham è definita anche per varietà a bordo. Il Teorema di Mayer - Vietoris e l'invarianza per omotopia continuano a valere anche in questo contesto. Potete usare anche che le varietà compatte con bordo hanno tutti i numeri di Betti finiti.

Esercizio 8.2. Siano M e N due varietà compatte con bordo e $\varphi\colon \partial M \to \partial N$ un diffeomorfismo. Sia W ottenuta incollando M con N via φ. Mostra che

$$\chi(W) = \chi(M) + \chi(N) - \chi(\partial M).$$

Esercizio 8.3. Siano M e N varietà con coomologia finito-dimensionale. Dimostra che

$$\chi(M \times N) = \chi(M) \cdot \chi(N).$$

Esercizio 8.4. Siano $L, L' \subset \mathbb{R}^n$ sottospazi affini.

(1) Mostra che le varietà $\mathbb{R}^n \setminus L$ e $\mathbb{R}^n \setminus L'$ sono omotopicamente equivalenti se e solo se $\dim L = \dim L'$.

(2) Mostra che se $\dim L > \dim L'$ allora ogni mappa continua $f\colon (\mathbb{R}^n \setminus L) \to (\mathbb{R}^n \setminus L')$ è omotopa ad una mappa costante.

Esercizio 8.5. Sia $T = S^1 \times S^1$ il toro e $p \in T$ un punto. Considera la 4-varietà $M = T \times T$ e le sottovarietà $N_1 = T \times \{p\}$ e $N_2 = \{p\} \times T$. Calcola i gruppi di coomologia di

$$X = M \setminus (N_1 \cup N_2).$$

Esercizio 8.6. Siano r_1, r_2, r_3 tre rette in $\mathbb{CP}^2$ con intersezione vuota $r_1 \cap r_2 \cap r_3 = \emptyset$.

(1) Calcola i gruppi di coomologia della varietà $X = \mathbb{CP}^2 \setminus (r_1 \cup r_2 \cup r_3)$.

(2) Mostra che esiste una mappa $f\colon X \to X$ tale che $f^*\colon H^*(X) \to H^*(X)$ non è né l'identità né banale.

Suggerimento. Usa una proiettività per mettere le rette in una forma semplice. □

Esercizio 8.7. Considera lo spazio iperbolico nel modello del semispazio:

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}, \quad g(x) = \frac{1}{x_n^2} g^E(x).$$

Qui g^E è il tensore euclideo. In altre parole

$$g_{ij}(x) = \frac{1}{x_n^2}\delta_{ij}.$$

Mostra che le mappe seguenti sono isometrie per la varietà riemanniana H^n:

- $f(x) = x + b$, con $b = (b_1, \ldots, b_{n-1}, 0)$;
- $f(x) = \lambda x$ con $\lambda > 0$.

Deduci che il gruppo di isometrie $\mathrm{Isom}(H^n)$ di H^n agisce transitivamente sulla varietà riemanniana H^n.

9. Esercizi del 9 maggio

Esercizio 9.1. Considera il piano iperbolico nel modello del semipiano:

$$H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \quad g = \frac{1}{y^2} g^E.$$

Calcola l'area del dominio

$$[-a, a] \times [b, \infty)$$

per ogni $a, b > 0$. L'area è ovviamente quella indotta dalla forma volume della varietà riemanniana H^2.

Esercizio 9.2. Scrivi la metrica euclidea g su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ usando coordinate polari (θ, ρ) e determina i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita rispetto a queste variabili θ, ρ.

Esercizio 9.3. Calcola i simboli di Christoffel nel piano iperbolico con il modello del semipiano H^2.

Sia $v_0 = (0, 1)$ punto tangente nel punto $(0, 1) \in H^2$. Sia v_t il trasporto parallelo di v_0 lungo la curva $\gamma(t) = (t, 1)$. Calcola l'angolo fra v_t e l'asse delle ordinate (il risultato dipende da t).

Esercizio 9.4. Costruisci delle metriche Lorentziane tempo-orientabili e tempo-non orientabili sia sul cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ che sul nastro di Möbius. È sufficiente un disegno che indichi i coni di luce e la breve descrizione di una strategia per costruire la metrica.

Esercizio 9.5. Un *frame* su una varietà pseudo-Riemanniana M è il dato di un punto $p \in M$ e di una base ortonormale $v_1, \ldots, v_n$ per T_pM. Mostra che le isometrie di $\mathbb{R}^{p,q}$, $S^{p,q}$ e $H^{p,q}$ agiscono transitivamente sui frame.

Esercizio 9.6. Identifichiamo $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ e scriviamo il modello del sempiano del piano iperbolico come $H^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$. Mostra che le trasformazioni di Möbius

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $\det \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) > 0$ sono tutte isometrie di H^2 che preservano l'orientazione.

Esercizio 9.7. Sia G un gruppo di Lie. Mostra che esiste sempre una metrica riemanniana su G invariante a sinistra, cioè tale che $L_g \colon G \to G$ sia un'isometria per ogni $g \in G$.

Esercizio 9.8. Sia G un gruppo di Lie compatto. Mostra che esiste sempre una metrica riemanniana su G *biinvariante*, cioè tale che L_g e R_g siano entrambe isometrie per ogni $g \in G$.

10. Esercizi del 16 maggio

Esercizio 10.1. Considera la connessione ∇ su $\mathbb{R}^3$ con simboli di Christoffel

$$\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{31}^2 = 1$$

$$\Gamma_{21}^3 = \Gamma_{32}^1 = \Gamma_{13}^2 = -1$$

e tutti gli altri simboli di Christoffel nulli. Mostra che questa connessione è compatibile con il tensore metrico euclideo g, ma non è simmetrica. Quali sono le geodetiche?

Esercizio 10.2. Considera il modello del disco dello spazio iperbolico $(B^n, \mathbf{g})$,

$$\mathbf{g}(x) = \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2}\right)^2 \mathbf{g}^E(x)$$

dove $\mathbf{g}^E$ è il tensore metrico euclideo. Sia $v \in S^{n-1}$. Mostra che la geodetica massimale passante per l'origine in direzione v è

$$\gamma(t) = \tanh t \cdot v = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1} v.$$

Esercizio 10.3. Sia M una varietà dotata di una connessione ∇ e $\gamma \colon I \to M$ una curva. Mostra che il trasporto parallelo

$$\Gamma(\gamma)_{t_0}^{t_1} \colon T_{\gamma(t_0)}M \longrightarrow T_{\gamma(t_1)}M$$

è invariante per riparametrizzzazione di γ. Cioè, se prendiamo una mappa suriettiva $\alpha \colon J \to I$ con $\alpha'(t) \geq 0$ per ogni $t \in J$, allora

$$\Gamma(\gamma)_{t_0}^{t_1} = \Gamma(\gamma \circ \alpha)_{u_0}^{u_1}$$

per qualsiasi $u_0, u_1 \in J$ con $\alpha(u_i) = t_i$.

Se V è uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare $\mathbf{h}$, indichiamo con $\mathrm{O}(V, \mathbf{h})$ il gruppo delle isometrie lineari $V \to V$, cioè degli isomorfismi di V che preservano $\mathbf{h}$. Ad esempio $\mathrm{O}(\mathbb{R}^n, \mathbf{g}) = \mathrm{O}(n)$ se $\mathbf{g}$ è il prodotto scalare Euclideo.

Esercizio 10.4. Sia M una varietà pseudo-Riemanniana connessa. Sia $p \in M$ un punto. Il *gruppo di olonomia* di M in p è il sottoinsieme

$$H_p = \left\{\Gamma(\gamma)_{t_0}^{t_1}\right\} \subset \mathrm{O}(T_pM, \mathbf{g}(p))$$

ottenuto al variare di tutte le curve $\gamma \colon I \to M$ con $t_0 < t_1$ contenuti in I e tali che $\gamma(t_0) = \gamma(t_1) = p$. Mostra che H_p è effettivamente un sottogruppo. Mostra che se $p, q \in M$ allora H_p e H_q sono isomorfi. Determina il tipo di isomorfismo di H_p per $M = \mathbb{R}^n$ e $M = S^2$.

Esercizio 10.5. Sia ∇ una connessione definita su una varietà $(M, \mathbf{g})$ pseudo-Riemanniana. Indichiamo il prodotto scalare $\mathbf{g}$ con $\langle , \rangle$. I fatti seguenti sono equivalenti:

(1) La connessione ∇ è compatibile con $\mathbf{g}$.

(2) Per ogni curva $\gamma \colon I \to M$ e campi vettoriali $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ su γ abbiamo

$$\frac{d}{dt}\big\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \big\rangle = \langle D_t\mathbf{X}, \mathbf{Y}\rangle + \langle \mathbf{X}, D_t\mathbf{Y}\rangle .$$

(Qui $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y}\rangle$ è interpretata come funzione $\gamma \colon I \to \mathbb{R}$)

(3) Per ogni vettore tangente $\mathbf{v} \in T_pM$ e campi vettoriali $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ definiti in un intorno di p vale

$$\mathbf{v}\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y}\rangle = \big\langle \nabla_{\mathrm{v}}\mathbf{X}, \mathbf{Y}\big\rangle + \big\langle \mathbf{X}, \nabla_{\mathrm{v}}\mathbf{Y}\big\rangle.$$

(Qui $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y}\rangle$ è una funzione liscia in un intorno di p.)

Non è necessario fare tutto l'esercizio: mostra almeno un paio di implicazioni fra le condizioni (1), (2) e (3).

Esercizio 10.6. Sia $(M, \mathbf{g})$ una varietà Riemanniana. La *divergenza* di un campo vettoriale $\mathbf{X}$ è definita come la contrazione del campo tensoriale $\nabla\mathbf{X}$ di tipo $(1, 1)$. In coordinate:

$$\mathrm{div}(\mathbf{X}) = \nabla_i X^i.$$

Mostra che in un qualsiasi sistema di coordinate valgono le formule seguenti:

$$\Gamma_{ji}^j = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{\det g},$$
$$\mathrm{div}(\mathbf{X}) = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(X^i\sqrt{\det g}\right).$$

Nella scrittura Γ_{ji}^j usiamo la convenzione di Einstein.

11. Esercizi del 23 maggio

Esercizio 11.1. Una varietà riemanniana connessa è *omogenea* se per ogni $p, q \in M$ esiste una isometria di M che porti p in q. Mostra che una varietà riemanniana omogenea è sempre completa.

Esercizio 11.2. Sia $f: M \to N$ una isometria locale fra varietà riemanniane connesse. Mostra che se M è completa, allora f è un rivestimento.

Esercizio 11.3. Sia $f: M \to N$ una isometria locale fra varietà riemanniane connesse che è anche un rivestimento. Mostra che M è completa $\iff$ N è completa.

Esercizio 11.4. Una varietà riemanniana connessa è *isotropa* in $p \in M$ se per ogni coppia di vettori $v, w \in T_pM$ di norma unitaria esiste una isometria f di M tale che $f(p) = p$ e $df_p(v) = w$. Mostra che una varietà riemanniana completa che è isotropa in ogni suo punto è anche omogenea.

Esercizio 11.5. Considera il modello dell'iperboloide $I^n \subset \mathbb{R}^{n,1}$ dello spazio iperbolico $\mathbb{H}^n$. Mostra che per ogni $p, q \in I^n$ vale l'uguaglianza

$$\cosh d(p, q) = -\langle p, q\rangle.$$

Esercizio 11.6. Sia M una varietà Riemanniana connessa completa. Un *raggio* uscente da $p \in M$ è una geodetica $\gamma\colon [0, +\infty) \to M$ con $\gamma(0) = p$ e $\|\gamma'(0)\| = 1$ tale che $d(\gamma(t), p) = t$ per ogni $t \in [0, +\infty)$. Mostra che se M è non compatta allora per ogni p esiste un raggio uscente da p.

Esercizio 11.7. Sia M una varietà Riemanniana connessa completa. Sia X un campo su M tale che $\|X(p)\| \leq C$ per ogni $p \in M$, per qualche costante $C > 0$ indipendente da p. Mostra che X è completo.

Esercizio 11.8 (Il toro di Clifton – Pohl)**.** Considera la varietà $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dotata della metrica Lorentziana

$$\mathbf{g}(x, y) = \frac{2}{x^2 + y^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ogni mappa $f(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ è una isometria. In particolare possiamo quozientare M con l'isometria $f(x, y) = (2x, 2y)$ e ottenere una superficie T diffeomorfa ad un toro. La struttura Lorentziana su M ne induce una su T. Dimostra che le curve

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{1-t}, 0\right), \qquad \eta(t) = (\tan(t), 1)$$

sono entrambe geodetiche massimali definite su $(-\infty, 1)$ e $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Quindi T è compatta ma non geodeticamente completa (questo fatto è impossibile nelle varietà Riemanniane per Hopf – Rinow).

Esercizio 11.9. Leggi sul libro il fatto che la differenza $D = \nabla - \nabla'$ fra due connessioni ∇, ∇' su M è interpretabile come un campo tensoriale di tipo $(1, 2)$. Mostra che ∇ e ∇' hanno le stesse geodetiche $\iff$ D è un tensore antisimmetrico.[1] Deduci che:

(1) $\nabla = \nabla' \iff$ hanno le stesse geodetiche e la stessa torsione.
(2) Per ogni ∇ esiste un'unica connessione ∇' con le stesse geodetiche di ∇ e con torsione nulla.

Hint. Dimostra che D è antisimmetrico $\iff D(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = 0$ per ogni campo $\mathbf{X}$ $\iff \nabla'_{\mathrm{X}}\mathbf{X} = \nabla_{\mathrm{X}}\mathbf{X}$ per ogni campo $\mathbf{X} \iff$ hanno le stesse geodetiche. $\square$

[1] Cioè per ogni $p \in M$ la mappa $D(p)\colon T_pM \times T_pM \to T_pM$ è antisimmetrica, cioè $D(p)(v, w) = -D(p)(w, v)$. In coordinate: $D^k_{ij} = -D^k_{ji}$.