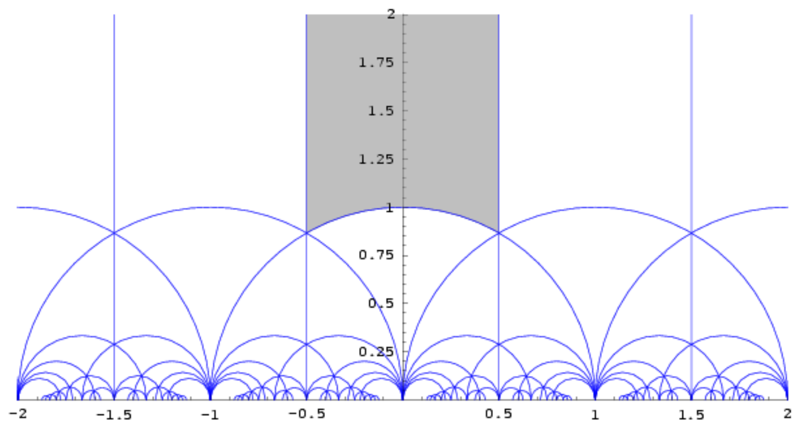
Geometria iperbolica

Esercizi II

Esercizio 1. Mostra che il poliedro grigio disegnato qui sotto è un dominio fondamentale per l'azione del gruppo discreto $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ su H^2.



Esercizio 2. Due matrici A, B sono *congruenti modulo* n se $A_{ij} \equiv B_{ij} \pmod{n}$. Per ogni intero $n \geqslant 2$, sia Γ_n il sottoinsieme di $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ formato dalle matrici congruenti modulo n a I oppure a $-I$. Mostra che Γ_n agisce in modo libero e propriamente discontinuo su H^2, e quindi $S = \mathbb{H}^2/_{\Gamma_n}$ è una superficie iperbolica.

(Se hai tempo e voglia) Calcola l'indice k di Γ_2 in $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Mostra che la superficie S si tassella in k copie del dominio fondamentale grigio mostrato sopra e usa questa tassellazione per calcolare l'area di S. Usa quindi Gauss-Bonnet per calcolare la caratteristica di Eulero di S. Sai riconoscere il tipo topologico della superficie?

Esercizio 3. Mostra che un cubo si decompone in 5 tetraedri. Mostra che il cubo ideale regolare in $\mathbb{H}^3$ si decompone in cinque tetraedri ideali regolari.