Geometria iperbolica

Esercizi II

31 ottobre 2011

Esercizio 1. Sia $f \in \mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ una isometria non banale del piano iperbolico $\mathbb{H}^2$. Mostra che

1. f è ellittica se e solo se $|\mathrm{tr} f| \leqslant 2$,
2. f è parabolica se e solo se $|\mathrm{tr} f| = 2$,
3. f è iperbolica se e solo se $|\mathrm{tr} f| > 2$.

Esercizio 2. Siano f, g due isometrie dello spazio iperbolico $\mathbb{H}^3$ del tipo seguente: f è una trasformazione parabolica con punto fisso $p \in \partial\mathbb{H}^3$ e g è una trasformazione iperbolica con punti fissi p e q in $\partial\mathbb{H}^3$. Mostra che il sottogruppo di $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$ generato da f e g non è un sottogruppo discreto di $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$. Potete usare il modello del sottospazio e rappresentare il gruppo di Lie $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$ come $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

Esercizio 3. Mostra che per ogni terna di angoli positivi α, β, γ con $\alpha+\beta+\gamma < \pi$ esiste un triangolo in $\mathbb{H}^2$ avente quegli angoli interni. Mostra che tale triangolo è unico a meno di isometrie (in particolare, le lunghezze dei suoi lati dipendono solo da α, β e γ).