GEOMETRIA ANALITICA E ALGEBRA LINEARE – A.A. 2007/2008
COMPITO SCRITTO
6 FEBBRAIO 2009

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

Esercizio 1 (10 punti)
Si considerino, nello spazio affine $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$, i seguenti sottospazi affini:

$$P_1 = \begin{cases} x_1 + x_3 = 1, \\ x_2 = 0. \end{cases} \qquad P_2 = \begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

$$P_3 = \begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases} \qquad P_4 = \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_3 = 1, \end{cases}$$

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t \\ 2t \end{pmatrix} \right\}$$

Si determini per quali coppie (i, j) con $1 \leqslant i < j \leqslant 4$ esiste una affinità $f\colon \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ tale che $f(r) = r$ e $f(P_i) = P_j$.

Soluzione. La retta r interseca il piano P_2 nel punto $(0, 1, -1, 0)$ e non interseca gli altri piani. La giacitura di r è contenuta nella giacitura di P_1 e non è contenuta nelle giaciture degli altri piani. Quindi r è parallela a P_1 e non agli altri piani. Ne segue che una affinità può forse esistere solo nel caso $(i, j) = (3, 4)$, e non esiste in tutti gli altri casi.

Una affinità nel caso $(3, 4)$ effettivamente esiste. Due punti distinti in r e tre punti non allineati in P_3 (analogamente, P_4) formano necessariamente un sistema di riferimento affine per $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$. Esiste un'unica affinità f che sposta il primo riferimento nel secondo. Una tale f manda necessariamente r in sé e P_3 in P_4.

Geometria Analitica e Algebra Lineare – A.A. 2007/2008
Compito scritto
6 febbraio 2009

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

Esercizio 2 (10 punti)
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo avente esattamente due piani invarianti (cioè tale che esistono due e non più di due sottospazi bi–dimensionali $U, V \subset \mathbb{R}^3$ tali che $f(U) \subset U$ e $f(V) \subset V$).

(1) Si dimostri che f non è diagonalizzabile (assumendo che esista).
(2) Si dimostri che un tale endomorfismo f esiste.
(3) Si determini una matrice A tale che $f = L_A$ abbia esattamente i seguenti due piani invarianti:

$$U = \{x_1 + x_2 = 0\}, \quad V = \{x_1 - x_3 = 0\}.$$

Soluzione.

(1) Se f è diagonalizzabile, ha una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ formata da autovettori. I piani $W_1 = \operatorname{Span}(v_2, v_3)$, $W_2 = \operatorname{Span}(v_3, v_1)$, $W_3 = \operatorname{Span}(v_1, v_2)$ sono invarianti e sono più di due.

(2) Sia $f = L_B$ con $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Questa applicazione ha almeno due piani invarianti $U = \operatorname{Span}(e_1, e_2)$ e $V = \operatorname{Span}(e_1, e_3)$. Resta da dimostrare che non ve ne sono altri. Sia W un piano invariante. Sia p_W il polinomio caratteristico della restrizione $f|_W$. Il polinomio p_W ha grado due e divide il polinomio caratteristico $p(t) = (t-1)^2 t$ di f. Quindi ci sono due casi da esaminare.

(a) Supponiamo che $p_W(t) = (t-1)t$. Gli autovalori sono distinti con molteplicità uno, quindi $f|_W$ è diagonalizzabile. Il piano W contiene gli autospazi relativi a 1 e 0. Quindi è necessariamente $W = V$.

(b) Supponiamo che $p_W(t) = (t-1)^2$. Per Hamilton-Cayley abbiamo $(f|_W - \mathrm{id})^2 = 0$. In altre parole, $W \subset \ker(f - \mathrm{id})^2 = U$. Questi due sottospazi di $\mathbb{R}^3$ hanno però entrambi dimensione due, quindi vale l'uguaglianza.

(3) Si considera la base formata da $v_1 = e_1 - e_2 + e_3$, $v_2 = e_2$, $v_3 = e_3$. In questo modo $U = \operatorname{Span}(v_1, v_3)$ e $V = \operatorname{Span}(v_1, v_2)$. Definiamo f come l'endomorfismo rappresentato dalla matrice B nella base (v_1, v_2, v_3). La matrice A è la matrice associata a f nella base canonica. La matrice di cambiamento di base dalla nuova alla canonica è $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si ottiene quindi $A = MBM^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Geometria Analitica e Algebra Lineare – A.A. 2007/2008
Compito scritto
6 febbraio 2009

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

Esercizio 3 (10 punti)
Sia n un intero positivo qualsiasi. Sia V uno spazio vettoriale reale su n. Sia $\mathrm{Bil}(V)$ lo spazio vettoriale formato da tutte le forme bilineari su V e $\mathrm{End}(V)$ lo spazio vettoriale formato da tutti gli endomorfismi di V.

(1) Sia A una matrice quadrata $n \times n$ a coefficienti reali. Si dimostri che A è antisimmetrica se e solo se ${}^t x A x = 0$ per ogni vettore $x \in \mathbb{R}^n$.
(2) Sia T il sottospazio di $\mathrm{Bil}(V)$ definito nel modo seguente:
$$T = \big\{ b \in \mathrm{Bil}(V) \;\big|\; b(v,v) = 0 \ \forall v \in V \big\}.$$
Si calcoli la dimensione di T.
(3) Sia b un prodotto scalare definito positivo su V, e sia S il sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(V)$ definito nel modo seguente:
$$S = \big\{ f \in \mathrm{End}(V) \;\big|\; b(f(v),v) = 0 \ \forall v \in V \big\}.$$
Si calcoli la dimensione di S.

Soluzione.

(1) Se A è antisimmetrica, allora ${}^t x A x = -{}^t x {}^t A x = -{}^t({}^t x A x) = -({}^t x A x)$ da cui ${}^t x A x = 0$. Se vale ${}^t x A x = 0$ per ogni x, allora anche ${}^t(x+y)A(x+y) = 0$ per ogni x e y. Svolgendo segue che ${}^t x A y = -{}^t y A x$ per ogni x, y. Prendendo $x = e_i$ e $y = e_j$ si deduce che $A_{ij} = -A_{ji}$, per ogni i, j.
(2) Una base di V determina un isomorfismo tra $\mathrm{Bil}(V)$ e lo spazio $M(n)$ delle matrici quadrate $n \times n$. L'isomorfismo porta T nel sottospazio delle matrici A tali che ${}^t x A x = 0$ per ogni x. Per il punto precedente, T è lo spazio delle matrici antisimmetriche ed ha quindi dimensione $n(n-1)/2$.
(3) Una base di V determina un isomorfismo tra $\mathrm{End}(V)$ e lo spazio delle matrici $M(n)$. Scegliamo a questo scopo una base ortonormale per b. Il prodotto scalare è quindi raprresentato in questa base dalla matrice identità I. Quindi S è isomorfo allo spazio delle matrici A tali che ${}^t(Ax)Ix = 0$ per ogni x. Ovvero ${}^t x A x = 0$ per ogni x. Come sopra, questo è lo spazio delle matrici antisimmetriche e ha quindi dimensione $n(n-1)/2$.