Geometria analitica e algebra lineare 2008/09

Esercizi 1/12/2008

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare. Supponiamo esistano due sottospazi vettoriali U, V di dimensione 2 distinti tali che $f(U) \subset U$ e $f(V) \subset V$. Dimostrare che esiste una base $\mathcal{B}$ rispetto alla quale la matrice associata a f è triangolare.

Esercizio 2. Sia H il piano in $\mathbb{R}^3$ di equazione $x+y-2z=0$ e r la retta generata dal vettore $(1,1,3)$. Costruire, se esiste, unapplicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(H) \subset r, \quad f(r) \subset H, \quad f^2 \neq 0.$$

Esercizio 3. Sia $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ da

$$f_\alpha(x,y,z) = (y+z, y+\alpha z, 2x-3y-z, x-2y-z).$$

1. Calolare, al variare di α, la dimensione di $\operatorname{Im}(f_\alpha)$.
2. Costruire un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\dim \operatorname{Im}(g) = 2$ e $\dim \operatorname{Im}(g \circ f_2) = 2$.

Esercizio 4. Siano $f, g : V \to W$ appplicazioni lineari fra spazi vettoriali. Vale in generale la disuguaglianza seguente?

$$\dim \operatorname{Im}(f+g) \leqslant \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Im} g.$$

(Se vale, dimostratela; altrimenti fornite un controesempio.)

Esercizio 5. Siano H, K due piani vettoriali in $\mathbb{R}^4$ e sia $i = \dim(H \cap K)$. Calcolare in funzione di i la dimensione degli spazi vettoriali

$$S = \left\{ f \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4) \;\middle|\; f(H) \subset H, f(K) \subset K \right\},$$
$$T = \left\{ f \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4) \;\middle|\; f(H) \subset K, f(K) \subset H \right\}.$$

Calcolate la dimensione di $S \cap T$ in funzione di i. Mostrate che se $i = 2$ allora $\operatorname{End}(\mathbb{R}^4) = S \oplus T$.

Esercizio 6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo K, sia $W \subset V$ un sottospazio e $L : V \to V$ un endomorfismo. Dimostrare che

$$\dim L(W) \geqslant \dim W - \dim \ker L.$$

Esercizio 7. Siano V, Z spazi vettoriali (di dimensione finita) su un campo K e $U \subset V$ un sottospazio. Dimostrare che per ogni applicazione lineare $f : U \to Z$ esiste una appplicazione lineare $\widetilde{f} : V \to Z$ tale che $\widetilde{f}|_U = f$.