Corso di Geometria analitica e algebra lineare
8 luglio 2008

Esercizio 1. Nello spazio affine $\mathbb{R}^2$ si considerino i seguenti sottoinsiemi:

$$X_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2y - 2xy^2 = 0\}, \quad X_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x + y)(xy - x - y + 1) = 0\}$$
$$X_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2y - xy = 0\}, \quad X_4 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^3 - y^2x = 0\}.$$

(i) Dire per quali $1 \leq i, j \leq 4$ esiste un'affinità f di $\mathbb{R}^2$ tale che $f(X_i) = X_j$;

(ii) dire per quali $1 \leq i, j \leq 4$ esiste un'isometria f di $\mathbb{R}^2$ tale che $f(X_i) = X_j$;

(iii) scelto uno dei casi al punto (i) o (ii) in cui l'applicazione f esiste, dire se è unica e darne un esempio esplicito.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{C}$, sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo e sia $m_f(t)$ il polinomio minimo di f.

Si consideri il sottospazio vettoriale $W \subset \mathrm{End}(V)$ definito da

$$W := \{g \in \mathrm{End}(V) \mid gf = fg\}.$$

(i) Per $n = 3$, determinare la dimensione di W nei seguenti casi:

a) $m_f(t) = (t - 1)(t - 2)(t - 3)$;

b) $m_f(t) = (t - 1)(t - 2)$;

a) $m_f(t) = (t - 1)^3$.

(ii) In generale, dimostrare che $\dim W \geq n$.

Esercizio 3. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ due forme bilineari simmetriche, b_1 di segnatura $(3, 0, 0)$ e b_2 di segnatura $(2, 1, 0)$.

(i) Dimostrare che esiste un automorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, diverso dall'identità, che è un'isometria sia per b_1 che per b_2 e tale che $\det(f) = 1$;

(ii) dare un esempio di b_1 e b_2 tali che l'insieme degli automorfismi f al punto (i) sia infinito.