Corso di Geometria analitica e algebra lineare

Primo compitino, 19/12/2006

Esercizio 1. Al variare di $t \in \mathbb{Q}$, si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{Q}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} t-2 \\ t-3 \\ 3-t \end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix} t-3 \\ t-2 \\ 3-t \end{pmatrix}; \quad v_3 = \begin{pmatrix} t-3 \\ t-3 \\ 4-t \end{pmatrix}.$$

(i) Dire per quali valori di $t \in \mathbb{Q}$ esiste $f_t \colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ lineare tale che $f(v_1) = e_1$, $f(v_2) = e_2$ e $f(v_3) = e_3$;

(ii) Per i valori di t per i quali esiste f_t, costruire la matrice associata a f_t rispetto alla base canonica e_1, e_2, e_3.

Esercizio 2. Sia $V := M_2(\mathbb{R})$. Fissata $C \in M_2(\mathbb{R})$, sia $g_C \colon V \to V$ l'applicazione definita da $g_C(X) = CX$.

(i) Dimostrare che g_C è lineare;

(ii) Posto $k = rk(C)$, determinare $rk(g_C)$ al variare di k;

(iii) Per $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, verificare che $V = \ker g_C \oplus \mathrm{Im} g_C$ e determinare $A \in \ker g_C$ e $B \in \mathrm{Im} g_C$ tali che $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A + B$.

Esercizio 3. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, giustificando la risposta.

(i) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$ e siano $S, T \subset V$ due sottospazi. Allora:

$$\mathrm{Ann}(S+T) = \mathrm{Ann}(S) \cap \mathrm{Ann}(T).$$

(ii) Sia $n > 1$ un intero e siano $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ le matrici tali che:

$$a_{ij} = 1, \quad 1 \le i, j \le n;$$

$$b_{ij} = 0, \quad 1 \le j < i \le n, \quad b_{ij} = 1, \quad 1 \le i \le j \le n.$$

Esistono $M, N \in Gl_n(\mathbb{K})$ tali che $A = MBN$.