# Corso di Geometria analitica e algebra lineare

## Secondo compitino, 17/04/2008

**Esercizio 1.** Si considerino nel piano affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ i punti $P_1 = (3, -1)$, $Q_1 = (-1, 1)$, $P_2 = (1, 0)$, $Q_2 = (0, 1)$, la retta $\mathcal{R}$ di equazione $x - 1 = 0$ e, al variare di $t \in \mathbb{R}$, il fascio di rette parallele $\mathcal{S}_t$ di equazione $x - y - t = 0$.

(i) Determinare i valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ per cui esiste un'affinità $f\colon \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ tale che $f(P_1) = P_2$, $f(Q_1) = Q_2$ e $f(\mathcal{R}) = \mathcal{S}_t$;

(ii) Scelto uno dei valori di $t$ determinati precedentemente, scrivere esplicitamente $f$ e dire se è unica.

**Esercizio 2.** Sia $A \in M(2, \mathbb{R})$ una matrice fissata. Consideriamo l'endomorfismo $f_A : M(2, \mathbb{R}) \to M(2, \mathbb{R})$ dato da

$$f_A(X) = AX.$$

Indichiamo inoltre con $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'usuale endomorfismo

$$L_A(X) = AX.$$

(i) Mostra che $\lambda$ è autovalore per $f_A$ se e solo se lo è per $L_A$;

(ii) Mostra che esiste una base di autovettori per $f_A$ se e solo se esiste una base di autovettori per $L_A$.

**Esercizio 3.** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ endomorfismo e $W_1, W_2$ due sottospazi di dimensione 2 tali che $f(W_i) \subset W_i$ per ogni $i = 1, 2$. Supponiamo che $f|_{W_1}$ sia diagonalizzabile e $f|_{W_2}$ non lo sia.

(i) Dire se $f$ è diagonalizzabile;

(ii) Dire se $f$ è triangolabile;

(iii) Il polinomio minimo di $f$ coincide necessariamente con il polinomio caratteristico?