**ANNO ACCADEMICO 2002/2003 CORSO di LAUREA in FISICA**

**GEOMETRIA I Primo compitino 5/11/2002**

**Esercizio 1**

Al variare di $k \in \mathbb{R}$, sia $U_k$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da

$U_k = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+kz+kt = 0, 2x+(2-k)y+3kz = 0, (2-k)x+2y+4kt = 0\}$.

Sia $W = \mathrm{Span}\,((1,1,2,3),(1,0,-1,-1),(-2,1,1,1),(-2,2,4,5)) \subset \mathbb{R}^4$.

1) Calcolare la dimensione di $U_k$ al variare di $k$.

2) Per quali $k$, $W$ e $U_k$ sono isomorfi?

3) Costruire una base di $T = W \cap U_0$.

4) Trovare un sottospazio $Z \subset \mathbb{R}^4$ tale che $T \oplus Z = \mathbb{R}^4$

**Esercizio 2**

Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2 e sia $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+y+z=0\}$. Sia $S$ l'insieme delle applicazioni lineari $f : V \to \mathbb{R}^3$ tali che $f(x^2+x-1) = (1,-1,2)$, $f(x^2+1) = (2,2,1)$ e $W \subset \mathrm{Im}\, f$.

1) Dimostrare che $S$ è non vuoto.

2) Dimostrare che ogni $f \in S$ è un isomorfismo.

3) Esiste $f \in S$ tale che $f(2x-4) = (0,1,1)$ ?

4) Esiste $f \in S$ tale che $f(x) = (0,-4,3)$ ?

**Esercizio 3**

Per ognuna delle affermazioni seguenti dire se sono vere o false, motivando la risposta.

a) Si considerino le due matrici reali $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 9 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

È possibile trasformare $A$ in $B$ attraverso un numero finito di operazioni elementari per riga.

b) Esistono $A, B \in {}_3\mathbb{R}_3$ tali che $\mathrm{rnk}\, A = \mathrm{rnk}\, B = 2$ e $\mathrm{rnk}\, AB = 3$.

c) Esistono $A, B \in {}_3\mathbb{R}_3$ tali che $\mathrm{rnk}\, A = \mathrm{rnk}\, B = \mathrm{rnk}\, AB = 2$.

**ANNO ACCADEMICO 2002/2003 CORSO di LAUREA in FISICA**

**GEOMETRIA I Primo compitino 5/11/2002**

**Esercizio 1**

Al variare di $k \in \mathbb{R}$, sia $U_k$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da

$U_k = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x+y+kz+kt = 0, 2x+(2-k)y+3kz = 0, (2-k)x+2y+4kt = 0\}$.

Sia $W = \mathrm{Span}\,((1,1,2,3),(1,0,-1,-1),(-2,1,1,1),(-2,2,4,5)) \subset \mathbb{R}^4$.

1) Calcolare la dimensione di $U_k$ al variare di $k$.

2) Per quali $k$, $W$ e $U_k$ sono isomorfi?

3) Costruire una base di $T = W \cap U_0$.

4) Trovare un sottospazio $Z \subset \mathbb{R}^4$ tale che $T \oplus Z = \mathbb{R}^4$

**Esercizio 2**

Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2 e sia $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, -x+y+z = 0\}$. Sia $S$ l'insieme delle applicazioni lineari $f : V \to \mathbb{R}^3$ tali che $f(x^2+x-1) = (1,-1,2)$, $f(x^2+1) = (2,2,1)$ e $W \subset \mathrm{Im}\, f$.

1) Dimostrare che $S$ è non vuoto.

2) Dimostrare che ogni $f \in S$ è un isomorfismo.

3) Esiste $f \in S$ tale che $f(2x-4) = (0,1,1)$ ?

4) Esiste $f \in S$ tale che $f(x) = (0,-4,3)$ ?

**Esercizio 3**

Per ognuna delle affermazioni seguenti dire se sono vere o false, motivando la risposta.

a) Si considerino le due matrici reali $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 9 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

È possibile trasformare $A$ in $B$ attraverso un numero finito di operazioni elementari per riga.

b) Esistono $A, B \in M(3,\mathbb{R})$ tali che $\mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}\, B = 2$ e $\mathrm{rk}\, AB = 3$.

c) Esistono $A, B \in M(3,\mathbb{R})$ tali che $\mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}\, B = \mathrm{rk}\, AB = 2$.