ANNO ACCADEMICO 2001/2002

CORSO di LAUREA in FISICA

GEOMETRIA I e II (facoltativo)

Appello del 25/6/2002

Esercizio 1 [G1]

Discutere al variare di a e b in $\mathbb{R}$ l'esistenza e l'unicità delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 0 \\ y + (a+1)z = 1 \\ -ax + (2a-1)z = 1 \\ ax + z = b \end{cases}$$

Esercizio 2 [G1, VO]

Costruire, se esiste, una applicazione lineare non diagonalizzabile $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che il vettore $(-2, 3, 3)$ sia un autovettore relativo all'autovalore -1 e i sottospazi W_1, W_2 dati dalle equazioni $x + y = 0$ e $x - y + z = 0$ rispettivamente, siano f-invarianti.

Esercizio 3 [G1]

Sia data la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$.

1) Calcolare, al variare di a, la segnatura di M.

2) Trovare una matrice P tale che ${}^tPP = I$ e $P^{-1}MP$ sia una matrice diagonale.

Sigle dell'esame: G1 = Geometria primo modulo; G2 = Geometria secondo modulo; VO = Vecchio ordinamento e Geometria primo+secondo modulo.
Durata: G1 e G2 2 ore, VO 3 ore.
Scrivere subito sul foglio: nome, numero di marticola e sigla dell'esame.

Esercizio 4 [G2, VO]

Sia φ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ definito nella base canonica dalla matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e siano $W_1 = \mathrm{Span}((0,1,1))^{\perp}$, $W_2 = \mathrm{Span}((2,1,-1))^{\perp}$, W_3 e W_4 definiti dalle equazioni $x + 2y = 0$ e $-2x + 3y + 2z = 0$, rispettivamente.

1) Decidere quali coppie (W_i, W_j) sono formate da sottospazi φ-isometrici.

2) Per le coppie (W_i, W_j) φ-isometriche, trovare una isometria $g \in O(\mathbb{R}^3, \varphi)$ tale che $g(W_i) = W_j$.

Esercizio 5 [G2, VO]

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione 4 e sia $f : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare non diagonalizzabile tale che $\dim\mathrm{Ker}\,(f - id)^2 = \dim\mathrm{Ker}\,(f + id)^2 \neq 0$. Trovare tutte le possibili forme canoniche di Jordan di f e dedurne i possibili polinomi minimi per f.

Esercizio 6 [G2, VO]

Dimostrare che il luogo dei punti di $\mathbb{R}^3$ equidistanti dal piano $z = 0$ e dal punto $(1,1,1)$ è una quadrica e se ne studi il tipo affine. Tale quadrica è isometrica alla quadrica di equazione $x^2 + y^2 = 2z$?