CORSO di LAUREA in FISICA

GEOMETRIA I e II

Appello del 14/1/2003

Esercizio 1 [RC1, G1, G1+2, VO] Al variare di $a \in \mathbb{R}$ si consideri l'applicazione $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(x,y,z) = (ax+y-z, 3x-y+2z, (7a-3)x+(a-1)y+z)$

1) Determinare i valori di a tali che $(2,1,3) \in \operatorname{Im} f$.

2) Per $a = 1$ costruire $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g \neq 0$ tale che $g \circ f_1 = 0$

Esercizio 2 [RC1, G1] Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, e sia $f \in \operatorname{End}(V)$.

1) Dimostrare che se $f^2 = 0$ allora dim $\operatorname{Ker} f \geq \frac{1}{2} \dim V$.

2) Dimostrare che $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ se e solo se V ha dimensione pari, $f^2 = 0$ e dim $\operatorname{Ker} f = \frac{1}{2} \dim V$.

3) Supponiamo $V = \mathbb{R}^4$ e $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$. Esiste una base di V tale che la matrice di f in tale base sia antisimmetrica?

Esercizio 3 [RC2, G1, VO] Su $\mathbb{R}^3$ si consideri il prodotto scalare φ_λ dipendente dal parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ e l'endomorfismo $f_{\lambda,a}$ dipendente dai parametri $\lambda, a \in \mathbb{R}$

$$\varphi_\lambda(X,Y) = {}^tX \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y \qquad f_{\lambda,a}(X) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ \lambda^2 & 2 & \lambda+1 \\ \lambda^2 & \lambda+1 & 1 \end{pmatrix} X$$

1) Dimostrare che $\forall\ \lambda, a \in \mathbb{R}$ e $\forall\ X, Y \in \mathbb{R}^3$ $\varphi_\lambda(f_{\lambda,a}(X), Y) = \varphi_\lambda(X, f_{\lambda,a}(Y))$.

2) Dimostrare che se $\lambda \neq 0$ allora $f_{\lambda,a}$ è diagonalizzabile $\forall\ a \in \mathbb{R}$.

3) Per $\lambda = 0$ determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ esiste una base ortogonale per φ_0 di autovettori per $f_{0,a}$.

Esercizio 4 [RC2, G1, G1+2, VO] Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione 3 e sia $f \in \operatorname{End}(V)$ tale che $W = \operatorname{Ker}(f^2 + id)$ ha dimensione 2.

Sigle dell'esame: RC1= Recupero primo compitino; RC2= Recupero secondo compitino; G1 = Geometria I; G2 = Geometria II; G1+2 = Geometria I+II; VO = Vecchio ordinamento.
Durata: RC1e RC2 1,5 ore;G1,G2, G1+2, VO 3 ore.
Scrivere subito sul foglio: nome, numero di marticola e sigla dell'esame.

1) Dimostrare che W è f-invariante.

2) Dimostrare che W è l'unico sottospazio f-invariante di dimensione 2.

3) Dimostrare che $\exists\, w \in W$ tale che $\{x, f(w)\}$ è una base di W.

4) Dimostrare che $\operatorname{tr} f = \det f$.

5) Dimostrare che il polinomio minimo di f coincide, a meno del segno, con il polinomio caratteristico di f.

Esercizio 5 [G2, G1+2] Sia $V = {}_2\mathbb{R}_2$, e $\forall\ A, B \in V$ definiamo $\varphi(A, B) = \operatorname{tr}(AB)$.

1) Verificare che φ è un prodotto scalare non degenere su V.

2) Verificare che $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ formano una base di V e trovare la base duale E^1, E^2, E^3, E^4.

3) Calcolare la segnatura del prodotto scalare su V^* definito da $\varphi^*(E^i, E^j) = \varphi(E_i, E_j) - \delta_{ij}$.

4) Rappresentare tramite φ il funzionale $L \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22} + a_{12}$.

5) Rappresentare tramite φ^* il funzionale $L^*(f) = f \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6 [G2, G1+2, VO] Al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ si consideri la conicha C_λ di equazione $(\lambda + 1)x^2 + (2 - \lambda)y^2 + (2\lambda - 1)xy - (\lambda + 1)x + (\lambda - 2)y = 0$.

1) Trovare il luogo dei punti comuni a tutte le coniche C_λ;

2) Determinare i $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui C_λ è degenere;

3) Esiste una retta l tale che $l \cap C_\lambda$ è un punto $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$?

4) Discutere al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il tipo affine della conica C_λ.

Esercizio 7 [G2] Sia r una retta in $\mathbb{R}^2$, $P_1, P_2, P_3 \in r$, $A, B \notin r$ tutti distinti con il punto di mezzo del segmento AB appartenente a r. Siano r_i, s_i le rette per A e P_i, B e P_i rispettivamente, per $i = 1, 2, 3$.

1) Dimostrare che ogni affinità che scambia r_1 con s_1 e r_2 con s_2 scambia anche r_3 con s_3.

2) Mostrare che tale affinità esiste ed è unica.

3) Detta f l'afinità del punto 2, mostrare che la retta s per A e B è f-invariante.

4) Dare condizioni su r, s, A, B affinché f sia un'isometria.