

Geometria I a Fisica

Esercizi

11 ottobre 2006

Esercizio 1. Sia $\text{tr}(A)$ la traccia di una matrice quadrata A . Siano A e B matrici quadrate con n righe. Mostrare che

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

ma che in generale non è vero che $\text{tr}(AB) = \text{tr}(A)\text{tr}(B)$, fornendo un controesempio

Esercizio 2. Sia n un intero positivo fissato. Per ogni $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$, sia $e_{i,j}$ la matrice $n \times n$ avente zeri ovunque salvo nella posizione (i, j) , dove ha valore 1. Mostrare che l'insieme

$$\{e_{i,j} + e_{j,i} \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$$

è una base per $S(n)$.

Esercizio 3. Mostrare che i tre vettori

$$(1, 1, 0), (0, 1, 1), (-1, 1, -1)$$

sono una base di \mathbb{R}^3 .

Esercizio 4. Trovare una base del sottospazio di \mathbb{R}^4 definito dalle equazioni

$$\begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ x + 2y - 3t = 0 \end{cases}$$

Esercizio 5. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, e consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} F : M(2) &\rightarrow M(2) \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

Mostra che l'applicazione F è lineare, e trova una base di $\ker F$. Trova anche una base dell'immagine $\text{Im } F$.