

**A. A. 2004/2005 CORSO di LAUREA in FISICA**  
**GEOMETRIA I e II Compito del 19/09/2005**

**Esercizio 1 (G1)**

Discutere, al variare del parametro reale  $t$ , l'esistenza e l'unicità delle soluzioni del sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y + tz = 1 \\ x + y + t^3z = 3 \\ 2x + 2y + (1+t)z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

**Esercizio 2 (G1, G1+2)**

Siano  $r, s$  e  $t$  tre rette distinte in  $\mathbb{R}^n$  passanti per l'origine e sia  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un'applicazione lineare tale che  $F(r) = s$ ,  $F(s) = t$ ,  $F(t) = r$ .

- (1) Dimostrare che se  $n = 3$  e le tre rette non sono complanari allora  $F$  non è diagonalizzabile.
- (2) È ancora vero che  $F$  non è diagonalizzabile se  $n = 3$  ma le tre rette sono complanari?
- (3) È ancora vero che  $F$  non è diagonalizzabile se  $n > 3$ ?

**Esercizio 3 (G1, G1+2)**

Sia  $\phi$  il prodotto scalare su  $\mathbb{R}^4$  definito dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (1) Determinare la segnatura di  $\phi$ .
- (2) Costruire un'applicazione lineare  $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tale che  $\phi(X, F(Y)) = 0$  per ogni  $X, Y \in \mathbb{R}^4$ .
- (3) Dimostrare che l'insieme  $\{F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \mid \phi(X, F(Y)) = 0 \forall X, Y \in \mathbb{R}^4\}$  è un sottospazio vettoriale di  $\text{End}(\mathbb{R}^4)$  e calcolarne la dimensione.

**Esercizio 4 (G1)**

Sia  $\psi$  il prodotto scalare su  $\mathbb{R}^3$  definito dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a+1 & a+2 & a+1 \\ a+2 & a+1 & a \end{pmatrix}$$

dipendente da un parametro reale  $a \in \mathbb{R}$ . Dire se esistono dei valori  $a \in \mathbb{R}$  per cui  $\psi$  è definito positivo o definito negativo.

**Esercizio 5** (G2, G1+2)

Sia  $f \in \text{End}(\mathbb{C}^4)$  con polinomio caratteristico  $p_f(x) = (x - 1)^2(x - 2)^2$  e tale che esistono un numero finito di sottospazi di  $\mathbb{C}^4$  di dimensione 2  $f$ -invarianti.

Dimostrare che tali sottospazi  $f$ -invarianti sono esattamente 3.

**Esercizio 6** (G2)

Sia  $\varphi$  il prodotto scalare non degenere su  $\mathbb{R}_3[x]$  definito da

$$\varphi(p, q) = p(0)q(0) + p(1)q(1) - p'(0)q'(0) - p'(1)q'(1), \quad \forall p, q \in \mathbb{R}_3[x].$$

- 1) Determinare una decomposizione di Witt per  $\varphi$ .
- 2) Rappresentare tramite  $\varphi$  il funzionale  $F : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}$  definito da  $F(p) = \int_0^1 p(t)dt \quad \forall p, q \in \mathbb{R}_3[x]$

**Esercizio 7** (G2, G1+2)

Sia  $C_\lambda \subset \mathbb{R}^2$  la conica di equazione  $(\lambda + 1)x^2 + 2xy + \lambda y^2 + 2\lambda x - 2y + 1 = 0$ , dove  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- 1) Determinare, al variare di  $\lambda$ , il tipo affine di  $C_\lambda$ .
- 2) Dimostrare che il luogo dei centri delle coniche  $C_\lambda$  è a sua volta una conica non degenere. È tale conica isometrica alla conica di equazione  $x^2 + 4xy + y^2 + 2y - 1 = 0$ ?