Geometria I e II
Appello del 15/9/2004

Esercizio 1 (G1, G1+2).
Discutere, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{C}$, l'esistenza e unicità delle soluzioni in $\mathbb{C}^4$ del sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z + 2\lambda t &= 1 \\ 2x + 2\lambda y - z + 8\lambda t &= 5 \\ x + \lambda y + \lambda z &= 1. \end{cases}$$

Esercizio 2 (G1).
Sia B una matrice $n \times n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ e siano $v_1, \ldots, v_{n+1}$ autovettori per B a n a n linearmente indipendenti. Provare che esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $B = \lambda I$.

Esercizio 3 (G1, G1+2). Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 e siano U_1, U_2 sottospazi vettoriali distinti di V, $\dim U_1 = \dim U_2 = 2$. Per ogni $j = 0, 1, 2, 3$ dire se esiste una applicazione lineare $f : V \to V$ che verifichi tutte le condizioni seguenti:

(1) $\dim \ker f = j$,
(2) $f^3 = f$,
(3) $f(U_1 \cap U_2) \neq \{0\}$,
(4) $f(U_1) \subseteq U_2$ e $f(U_2) \subseteq U_1$.

Esercizio 4 (G1).
Al variare di α in $\mathbb{R}$, si consideri la matrice reale

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Determinare, al variare di α, gli indici di positività, negatività e nullità del prodotto scalare φ_α su $\mathbb{R}^3$ associato ad A_α rispetto alla base canonica.

Esercizio 5 (G2, G1+2).
Sia φ_α il prodotto scalare dell'esercizio 4.
1) Determinare per quali α i due sottospazi di equazioni $x - 2y - z = 0$ e $x + y + 2z = 0$ sono φ_α-isometrici.
2) Per $\alpha = 1$, rappresentare il funzionale F definito da $F(x, y, z) = x - y - z$.

Esercizio 6 (G2, G1+2).
Calcolare la forma canonica di Jordan complessa e il polinomio minimo della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sigle dell'esame: G1 = Geometria I; G2 = Geometria II; G1+2 = Geometria I+II e Vecchio ordinamento.
Durata: 3 ore.
Scrivere su tutti i fogli: nome, numero di marticola e sigla dell'esame.

Sia $S \subset \mathbb{R}^2$ il sottoinsieme formato dai segmenti $\overline{(-1,0)(0,1)}$, $\overline{(0,1)(3,0)}$, $\overline{(-1,0)(3,0)}$, $\overline{(-1,0)(0,-2)}$, $\overline{(0,-2)(3,0)}$ e sia $T \subset \mathbb{R}^2$ il sottoinsieme formato dai segmenti $\overline{(2,1)(2,2)}$, $\overline{(2,2)(3,1)}$, $\overline{(2,1)(3,1)}$, $\overline{(2,1)(x,y)}$, $\overline{(x,y)(3,1)}$, dove $y < 1$.

1) Dare condizioni necessarie e sufficienti su x e y affinché esista una affinità di $\mathbb{R}^2$ a determinante positivo che mandi S in T.

2) Identificato $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, dimostrare che non esiste nessuna affinità di $\mathbb{C}$ che mandi S in T.