ANNO ACCADEMICO 2004/2005

CORSO di LAUREA in FISICA

GEOMETRIA I Primo compitino 12/11/2004

Esercizio 1

Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere l'esistenza e l'unicità delle soluzioni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ del seguente sistema:

$$\begin{cases} x - y + 2z &= 1 \\ 2x + (\alpha - 2)y + 2z &= 1 \\ -x + y + (\alpha^2 - \alpha - 2)z &= \alpha - 1 \end{cases}$$

Esercizio 2

Sia $F : \mathbb{R}_3[x] \to {}_2\mathbb{R}_2$ l'applicazione definita da

$$F(p(x)) = \begin{pmatrix} p(0) & p(3) \\ p'(0) & p'(2) \end{pmatrix}$$

dove $p'(x) = \frac{dp}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c$ è la derivata di $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

1) Verificare che F è lineare.

2) Determinare una base di $\mathrm{Im}F$ e completarla a una base di ${}_2\mathbb{R}_2$.

3) Determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}_3[x]$ e una base $\mathcal{B}'$ di ${}_2\mathbb{R}_2$ tali che la matrice associata a F nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sia del tipo $\left(\begin{array}{c|c} -I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

Esercizio 3

Per ognuna delle affermazioni seguenti dire se sono vere o false, motivando la risposta.

a) Esiste una applicazione $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ lineare e surgettiva tale che

$$f(0, 1, 0, 1) = f(1, 0, 1, 0) = f(0, 0, 0, 1).$$

b) Sia $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & b \end{pmatrix} \in {}_2\mathbb{R}_2 \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. Sia $A(2) \subset {}_2\mathbb{R}_2$ il sottospazio delle matrici antisimmetriche. Allora V è un sottospazio di ${}_2\mathbb{R}_2$ e ${}_2\mathbb{R}_2 = V \oplus A(2)$.