

**ANNO ACCADEMICO 2004/2005**  
**CORSO di LAUREA in FISICA**  
**GEOMETRIA I Primo compito 12/11/2004**

**Esercizio 1**

Sia  $V = \mathbb{R}_k[x]$ ,  $k \geq 2$ , e siano  $U = \{f \in V \mid x^2|f\}$ ,  $W = \{f \in V \mid (x^2 + 1)|f\}$ , dove  $q|f$  significa  $q$  divide  $f$ , cioè  $f = pq$  per qualche  $p \in V$ .

- 1) Dimostrare che  $U$  e  $W$  sono sottospazi vettoriali di  $V$ .
- 2) Dimostrare che  $U$  e  $W$  sono isomorfi.
- 3) Scrivere  $U$  come nucleo di una applicazione lineare  $F : V \rightarrow \mathbb{R}^s$  con  $s$  che non dipende da  $k$  e scrivere la matrice di  $F$  nelle basi  $1, x, x^2, \dots, x^k$  di  $V$  e canonica di  $\mathbb{R}^s$ .
- 4) Per quali valori di  $k$   $U \cap W = \{0\}$ ?
- 5) Per quali valori di  $k$   $U \oplus W = V$ ?

**Esercizio 2**

Risolvere con l'algoritmo di Gauss al variare di  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + \alpha y + \beta z = 1 \\ 2x + 3\alpha y + 2\beta z = 2 \\ \beta x + \alpha(2 + \beta)y + (\alpha + \beta + \beta^2)z = 2\beta \end{cases}$$

**Esercizio 3**

- 1) Dire per quali valori di  $a \in \mathbb{C}$  la seguente matrice è diagonalizzabile:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a - 2 & 3a - 3 & 4a - 3 \end{pmatrix}$$

- 2) Per  $a = 1 - i$ , trovare (se esiste) una base di  $\mathbb{C}^3$  costituita da autovettori di  $A$ .