ANNO ACCADEMICO 2001/2002

GEOMETRIA per FISICA Appello del 21/1/2002

Esercizio 1 [NO]

Data la matrice $A = \begin{pmatrix} a+b & a & 2a-b \\ b & a & a-b \\ a+2b & b+a & 3a-2b \end{pmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{R}$ dimostrare che lo spazio delle soluzioni del sistema $Ax = 0$ non ha mai dimensione 2.

Esercizio 2 [NO, VO]

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ e siano $f, g \in \operatorname{End}(V)$.

1) Dimostrare che se f è diagonalizzabile, allora f^n è diagonalizzabile $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

2) Dimostrare che se f^n ha un solo autovalore per qualche $n \geq 1$, allora f ha al più n autovalori distinti.

3) Dimostrare che se esiste una base di V costituita da autovettori comuni di f e g, allora $\forall\, n, m \in \mathbb{Z}$ $f^n + g^m$ e $f^n \circ g^m$ sono diagonalizzabili.

Esercizio 3 [C2, NO, VO]

Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$.

1) Dimostrare che esiste un unico endomorfismo $f : V \to V$ tale che $f(x) = 2x^2 + x$ $f(x^2 - 4) = x^2 - 3$ $f(x^2 + x) = 3x^2 + x + 1$.

2) Trovare il polinomio minimo $q(t)$ di f.

3) Provare che il polinomio minimo di $g = f + id$ è $q(t-1)$.

4) Provare che il polinomio minimo di $h = f^2$ è $q(t)$.

(Può essere utile calcolare la matrice di f nella base $\{1, x, x^2\}$)

Sigle dell'esame: C2 = Secondo compitino; NO = Compito nuovo ordinamento; VO = Compito vecchio ordinamento.
Durata: NO e VO: 3 ore; C2: 1 ora e 30 minuti.
Scrivere subito sul foglio: nome, numero di marticola e sigla dell'esame.

Esercizio 4 [C2, NO, VO]

Dato il prodotto scalare $<,>$ su $V = \mathbb{R}^4$ definito nella base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 12 & 6 & 4 \\ 1 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1) dire se $<,>$ è non degenere e calcolarne l'indice di nullità;

2) provare che la restrizione di $<,>$ a ogni sottospazio di dimensione 3 è degenere;

3) posto $W = \text{Span}\,(e_1, e_2)$ dimosrtare che $V = V^{\perp} \oplus W$;

4) provare che l'indice di negatività di $<,>$ è 0;

5) trovare una base ortogonale di V rispetto a $<,>$.

Esercizio 5 [VO]

Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ riconoscere il tipo affine della conica data dall'equazione $(5 - 4a)x^2 + y^2 + 2xy + (4 - 4a)x + 1 = 0$.