ANNO ACCADEMICO 2001/2002

CORSO DI LAUREA IN FISICA

GEOMTERIA II (facoltativo)

PRIMO COMPITINO 19/4/2002

Posto $V = \mathbb{R}_3[x]$, siano:

$U \subset V$ il sottospazio $U = \mathrm{Span}\{1, x\}$,

$D \in \mathrm{Hom}(V, V)$ l'operatore di derivazione, $D(p) = \frac{dp}{dx} \quad \forall\, p \in V$,

$f, g \in V^*$ i funzionali definiti da $f(p) = p(0)$, $g(p) = p(1) \quad \forall\, p \in V$,

$\varphi \in \mathrm{Bil}(V)$ la forma bilineare definita da $\varphi(p,q) = \int_0^1 D(p)D(q)dx - f(p)f(q)$, per ogni $p, q \in V$,

B la base di V data dai polinomi $\{1, x, x^2, x^3\}$.

1) Dimostrare che f, $f \circ D$, $f \circ D^2$, $f \circ D^3$ formano una base di V^* ed esprimere in funzione di tale base la base duale della base B.

2) Dimostrare che φ è un prodotto scalare non degenere e calcolarne la segnatura.

3) Dimostrare che $\mathrm{Ann}(\mathrm{Span}(f,g)) = U^\perp$, e dedurne $\mathrm{Ann}((U + (\mathrm{Ker}\, g)^\perp)^\perp)$ (si usi l'isomorfismo canonico tra V^{**} e V per identificare sottospazi di V^{**} con sottospazi di V).

4) Rapprresentare (nel senso del "teorema di rappresentazione") f e g tramite φ.

5) Dire se $\mathrm{Ker}\, D^3$, $\mathrm{Ker}\, f$ e $\mathrm{Ker}\, g$ sono φ-isometrici.