ANNO ACCADEMICO 2001/2002 CORSO di LAUREA in FISICA

GEOMETRIA I e II (facoltativo)

Appello del 17/9/2002

Esercizio 1 [G1, VO]

Determinare per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, il sistema $\begin{cases} \alpha x - \alpha^2 y = 2 \\ \beta x + \beta^2 z = -2 \end{cases}$ definisce una retta in $\mathbb{R}^3$ che interseca la retta $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

Esercizio 2 [G1, VO]

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, φ un prodotto scalare su V e sia fissato $v \in V \setminus \{0\}$.

Definiamo $\Phi : \mathrm{Hom}\,(V,V) \times \mathrm{Hom}\,(V,V) \to \mathbb{R}$ tramite la formula $\Phi(f,g) = \varphi(f(v), g(v))$.

1) Dimostrare che Φ è un prodotto scalare su $\mathrm{Hom}\,(V,V)$ ed è degenere.

2) Sia $v_1, \ldots, v_n$ una base di V e siano $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{Hom}\,(V,V)$ tali che $f_i(v) = v_i$ per ogni i. Sia $\mathrm{Ann}\,(v) = \{f \in \mathrm{Hom}\,(V,V) |\ v \in \mathrm{Ker}\, f\}$.

Dimostrare che $\mathrm{Span}\,(f_1, \ldots, f_n)$ è un supplementare di $\mathrm{Ann}\,(v)$.

3) Calcolare la segnatura di Φ in termini della segnatura di φ (usare una base contenente $f_1, \ldots, f_n$).

Esercizio 3 [G2, VO]

Sia C_λ la conica di equazione $(1+\lambda)x^2 + 3y^2 + \lambda xy = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dire se esiste λ per cui la conica C_λ è:

1) vuota;

2) una parabola;

3) isometrica alla conica di equazione $3x^2 + 3y^2 - 2xy + 8x - 8y + 3 = 0$ e, in tal caso, se ne studi il tipo affine.

Sigle dell'esame: G1 = Geometria I; G2 = Geometria II; VO = Vecchio ordinamento e Geometria I+II. Durata: G1 e G2 2,5 ore, VO 3 ore.

Scrivere subito sul foglio: nome, numero di marticola e sigla dell'esame.

Esercizio 4 [G2, VO]

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione 4 e sia $f : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare.

Dimostrare che se la forma canonica di Jordan di f contiene un solo blocco allora per ogni $i = 1, 2, 3$ esistono unici dei sottospazi $W_i \subset V$ f-invarianti tali che $\dim W_i = i$.

Dimostrare che se esiste $i \in \{1, 2, 3\}$ tale che esisite un unico sottospazio $W \subset V$ di dimensione i f-invariante, allora la forma canonica di Jordan di f contiene un solo blocco.

Esercizio 5 [G1]

Sia $V = \mathbb{R}[x, y]$ lo spazio vettoriale dei polinomi nelle variabili x, y a coefficienti reali, e sia $V_n = \{p \in V |\ p \text{ è omogeneo di grado} \, n\} \cup \{0\}$. Sia $W = \mathbb{R}[x]$ e $W_n = \mathbb{R}_n[x] \subset W$.

1) Verificare che V_n è un sottospazio di V e calcolarne la dimensione.

2) Dimostrare che $F : V \to W$, $F(p(x, y)) = p(x, 1)$ è lineare e surgettiva.

3) Dimostrare che $F_{|V_n}$ è iniettiva e che $F(V_n) = W_n$.

4) Verificare che $G : V \to V$, $G(p) = x\frac{\partial p}{\partial y} + y\frac{\partial p}{\partial x}$ è lineare e ogni V_n è G-invariante.

5) Dimostrare che $G_{|V_n}$ non è iniettiva se n è pari.

Esercizio 6 [G2]

Dati tre piani distinti V_1, V_2, V_3 in $\mathbb{R}^3$, siano $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ tali che Span $(v_1) = V_2 \cap V_3$, Span $(v_2) = V_1 \cap V_3$, Span $(v_3) = V_1 \cap V_2$.

Esistono tre piani e tre vettori in $\mathbb{R}^3$ come sopra ed un prodotto scalare su R^3 di segnatura $(2, 1, 0)$ tali che i V_i, muniti della restrizione del prodotto scalare, sono due a due isometrici ed inoltre valgano rispettivamente e separatamente le seguenti proprietà?

1) v_1, v_2, v_3 sono una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.

2) v_1, v_2, v_3 sono una base di vettori isotropi di $\mathbb{R}^3$.

3) $v_1 = v_2$ e v_3 è isotropo.