ANNO ACCADEMICO 2003/2004 CORSO di LAUREA in FISICA

GEOMETRIA I Primo compitino 17/11/2003

Esercizio 1

Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ discutere l'esistenza e l'unicità delle soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} x + \alpha y - 2z &= \alpha \\ -x + z &= 1 - \alpha \\ -2x - 3\alpha y + (\alpha + 4)z &= -3 - \alpha \end{cases}$$

Esercizio 2

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (x + 3y + 2z, 2x - z, -x + 3y + 3z, 3x + 3y + z)$$

e sia $U = \mathrm{Span}\,((1, 2, 1)) \subset \mathbb{R}^3$.

1) Trovare una base di $\mathrm{Im}\, f$.

2) Costruire $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ lineare tale che $g \circ f = 0$ e $\mathrm{Im}\, g = U$.

Esercizio 3

Per ognuna delle affermazioni seguenti dire se sono vere o false, motivando la risposta.

a) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano $V_1, \ldots, V_k$ sottospazi di V . $W = \{f \in \mathrm{Hom}\,(V, W) |\ f(V_i) \subset V_i\ \forall i = 1, \ldots, k\}$ è un sottospazio di $\mathrm{Hom}\,(V, W)$.

b) Dati $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$, se per ogni $i \neq j$ v_i e v_j sono linearmente indipendenti, allora v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti.

c) Siano V_1, V_2, W sottospazi dello spazio vettoriale V .
$V_1 \oplus W = V_2 \oplus W \quad \Rightarrow \quad V_1 = V_2$.

ANNO ACCADEMICO 2002/2003 CORSO di LAUREA in FISICA

GEOMETRIA I Primo compitino 5/11/2002

Esercizio 1

Al variare di $k \in \mathbb{R}$, sia U_k il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da

$U_k = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+kz+kt = 0, 2x+(2-k)y+3kz = 0, (2-k)x+2y+4kt = 0\}$.

Sia $W = \mathrm{Span}\,((1, 1, 2, 3), (1, 0, -1, -1), (-2, 1, 1, 1), (-2, 2, 4, 5)) \subset \mathbb{R}^4$.

1) Calcolare la dimensione di U_k al variare di k.

2) Per quali k, W e U_k sono isomorfi?

3) Costruire una base di $T = W \cap U_0$.

4) Trovare un sottospazio $Z \subset \mathbb{R}^4$ tale che $T \oplus Z = \mathbb{R}^4$

Esercizio 2

Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2 e sia $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + z = 0\}$. Sia S l'insieme delle applicazioni lineari $f : V \to \mathbb{R}^3$ tali che $f(x^2 + x - 1) = (1, -1, 2)$, $f(x^2 + 1) = (2, 2, 1)$ e $W \subset \mathrm{Im}\, f$.

1) Dimostrare che S è non vuoto.

2) Dimostrare che ogni $f \in S$ è un isomorfismo.

3) Esiste $f \in S$ tale che $f(2x - 4) = (0, 1, 1)$?

4) Esiste $f \in S$ tale che $f(x) = (0, -4, 3)$?

Esercizio 3

Per ognuna delle affermazioni seguenti dire se sono vere o false, motivando la risposta.

a) Si considerino le due matrici reali $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 9 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

È possibile trasformare A in B attraverso un numero finito di operazioni elementari per riga.

b) Esistono $A, B \in M(3, \mathbb{R})$ tali che $\mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}\, B = 2$ e $\mathrm{rk}\, AB = 3$.

c) Esistono $A, B \in M(3, \mathbb{R})$ tali che $\mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}\, B = \mathrm{rk}\, AB = 2$.