Anno Accademico 2018/2019
Geometria I
Scritto del 8/7/2019

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione finita e siano U, W due sottospazi di V. Data $f : U \to W$ lineare, definiamo $G_f = \{u + f(u)|\ u \in U\}$.

a) Mostrare che G_f è un sottospazio di V di dimensione almeno $\dim U - \dim U \cap W$.

Fissato $n \geq 1$, si consideri $\mathbb{K}^n$ e sia $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonica. Per ogni $J \subset \{1, \ldots, n\}$, siano $W_J = \mathrm{Span}\{e_j | j \in J\}$, $J' = \{1, \ldots, n\} \setminus J$, $p_J : W_J \oplus W_{J'} \to W_J$ la proiezione naturale.

b) Per ogni $1 \leq m \leq n$, per ogni sottospazio Z di $\mathbb{K}^n$, $\dim Z = m$, dimostrare che esiste $J \subset \{1, \ldots, n\}$, $|J| = m$, tale che la restrizione di p_J su Z è un isomorfismo con W_J.

c) Per ogni Z come in b), dimostrare che esiste $f : W_J \to W_{J'}$ lineare tale che $Z = G_f$.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione $n \geq 1$, e sia $f : V \to V$ un endomorfismo. Indichiamo con μ_f il polinomio minimo di f e con $Sp(f)$ lo spettro di f.
Sia SD_f l'insieme dei sottospazi f-invarianti non banali $U \subset V$ tali che la restrizione di f a U è diagonalizzabile e poniamo $d_f = max\{\dim U|\ U \in SD_f\}$.
Supponiamo che $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ dove per ogni $i = 1, \ldots, k$, W_i è un sottospazio f-invariante e $W_i \notin SD_f$.

a) Mostrare che esiste un unico $U \in SD_f$ di dimensione d_f e che $k \leq d_f \leq n - k$.

b) Dimostrare che $d_f = k$ se e solo se per ogni $i = 1, \ldots, k$ esiste un unico $U_i \in SD_f$ tale che $U_i \subset W_i$.

c) Dimostrare che $d_f = n - k$ se e solo se per ogni $i = 1, \ldots, k$, $\deg \mu_{f_{|W_i}} = |Sp(f_{|W_i})| + 1$, e per ogni $\lambda \in Sp(f_{|W_i})$, $\dim \mathrm{Ker}(f_{|W_i} - \lambda id)^2 \leq \dim \mathrm{Ker}(f_{|W_i} - \lambda id) + 1$.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione finita e indichiamo con $PS(V)$ lo spazio vettoriale dei prodotti scalari su V. Dato $W \subset V$ un sottospazio, $\dim W = m$, e dato $\phi \in PS(W)$, definiamo $E_\phi = \{\psi \in PS(V)|\ \psi_{|W} = \phi\}$.

a) Mostrare che E_ϕ è un sottospazio affine non vuoto di $PS(V)$ (considerato come spazio affine su sé stesso) e calcolarne la dimensione.

b) Sotto quali ipotesi su $\mathrm{rk}\, \phi$ esiste $\psi \in E_\phi$ non degenere?

c) Dato $U \subset V$ un sottospazio tale che $V = W \oplus U$, e dato $\varphi \in PS(U)$, mostrare che ogni prodotto scalare in $PS(V)$ è combinazione affine di un elemento di E_ϕ e di un elemento di E_φ.

Durata: 3 ore. Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.