Anno Accademico 2018/2019
Geometria I
Scritto del 13/1/2020

Esercizio 1.

a) Determinare le classi di similitudine per le $M \in GL(2, \mathbb{R})$ che sono simili sia a M^{-1} che a M^3.

Siano $A, B, C \in M(2, \mathbb{R})$ tali che $AB = C$, $BC = A$, $CA = B$.

b) Mostrare che $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B = \operatorname{Ker} C$ e $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} B = \operatorname{Im} C$.

c) Mostrare che se una tra A, B o C è nilpotente, allora $A = B = C = 0$.

d) Mostrare che A, B e C non hanno spettro vuoto e che il loro polinomimo minimo divide $x^3 - x$.

e) Dimostrare che non esistono A, B e C distinte tali che $\det(A) = \det(C)$ e $\operatorname{tr}(A) \neq 0$.

Esercizio 2.
Siano V, W, Z spazi vettoriali di dimensione finita sul campo $\mathbb{K}$ di caratteristica diversa da 2. Sia φ un prodotto scalare non degenere su V, e sia ψ un prodotto scalare su W.

a) Mostrare che per ogni $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$, esisite un'unica $f^* \in \operatorname{Hom}(W, V)$ tale che $\psi(w, f(v)) = \varphi(f^*(w), v)$, per ogni $w \in W$ e per ogni $v \in V$.

b) Mostrare che, se φ è anisotropo, $\operatorname{Im}(ff^*)^\perp = \operatorname{Im}(f)^\perp$.

c) Dimostrare che, se φ è anisotropo, ψ è non degenere e $g_1, g_2 \in \operatorname{Hom}(W, Z)$, allora $g_1ff^* = g_2ff^*$ se e solo se $g_1f = g_2f$. (Suggerimento; può essere utile riscrivere la condizione nella forma $(g_1 - g_2)ff^* = 0$.)

Esercizio 3.
Sia $\mathbb{K}$ un campo e siano $N, M \in M(n, \mathbb{K})$ due matrici nilpotenti.

a) Se $B \in GL(n, \mathbb{K})$ commuta con N, allora $\operatorname{Ker}(NB)^k = \operatorname{Ker} N^k$ per ogni $k \geq 0$.

b) Per ogni matrice in $\operatorname{Span}(I, N, N^2, \ldots)$ determinarne spettro e determinante.

c) Mostrare che per ogni $k > 0$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$, esiste $Z \in GL(n, \mathbb{K})$ che commuta con N tale che $(N + \lambda I)^k = \lambda^k I + NZ$.

d) Per $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^*$, $h, k > 0$, dimostrare che $(N + \lambda I)^k$ e $(M + \mu I)^h$ sono simili se e solo se $\lambda^k = \mu^h$ e N e M sono simili.

Durata: 3 ore. Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.