Anno Accademico 2018/2019
Geometria 1
Seconda prova in itinere
29/5/2019

Esercizio 1.
Dato uno spazio vettoriale V di dimensione finita e un endomorfismo nilpotente $h : V \to V$, ricordiamo che la stringa invariante di h è definita da $(d_1, d_2, \ldots, d_r)$, dove $d_j = \dim \operatorname{Ker} h^j$, per $j = 1, \ldots, r$, e $d_{r-1} < d_r = \dim V$.
Al variare di x, y, z in $\mathbb{N}$, determinare tutte e sole le stringhe della forma $(x, y, 5, 7)$, $(2, x, y, z)$ oppure $(x, 5, y, z)$ che sono realizzabili come stringhe invarianti di qualche endomorfismo nilpotente.

Esercizio 2.
Si consideri il sottospazio W di $M(n, \mathbb{R})$ generato da $\{I, J\}$, dove le colonne di J sono $(e_n, e_{n-1}, \ldots, e_1)$ essendo $\{e_j\}_{j=1,\ldots,n}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Sia $G_W = \{A \in W |\ \det A \neq 0\}$.

a) Dimostrare che G_W e' un sottogruppo di $GL(n, \mathbb{R})$.

b) Per ogni $A \in W$ determinare la sua forma normale di Jordan reale.

Esercizio 3.
Per $a \in \mathbb{R}$, sia $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & -4 & a \end{pmatrix}$ e sia φ_a il prodotto scalale su $\mathbb{R}^4$ dato da $\varphi_a(X, Y) = X^\top M_a Y$, per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^4$. Sia $U = \operatorname{Span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$ e sia $f \in (\mathbb{R}^4)^*$ il funzionale dato da $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}) = x$, per ogni $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

a) Calcolare, al variare di a in $\mathbb{R}$, la segnatura di φ_a.

b) Verificare che $U = \operatorname{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})^\perp$ e determinare gli $a \in \mathbb{R}$ per cui $\dim U^\perp = 2$.

c) Determinare gli $a \in \mathbb{R}$ per cui f è φ_a-rappresentabile.

Esercizio 4.
Per $\mathbb{K}$ campo, indichiamo con $O(n, \mathbb{K}) = \{P \in M(n, \mathbb{K}) |\ P^\top P = I\}$.
Siano $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ due matrici simmetriche. Discutere la verità della seguente affermazione:
"Esiste $P \in O(n, \mathbb{R})$ tale che $P^\top AP = B$ se e solo se esiste $P \in O(n, \mathbb{C})$ tale che $P^\top AP = B$".

Durata: 2 ore. Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.