Anno Accademico 2017/2018
Geometria I   Scritto del 18/6/2018

Esercizio 1. (R1) Sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ tale che $f(v) = Av$ per ogni $v \in \mathbb{R}^4$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per $k \in \mathbb{R}$, sia $U_k = \{(x, y, z, t)^\top \in \mathbb{R}^4 \mid x - ky + z - t = 0,\ y + (1 + k)t = 0\}$.

a) Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker} f \oplus U_k$ e $f(U_k) \subseteq U_k$.

b) Fissato uno dei valori di k trovati nel punto a), si denoti con $\pi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ la proiezione su $\operatorname{Ker} f$ indotta dalla decomposizione in somma diretta $\mathbb{R}^4 = \operatorname{Ker} f \oplus U_k$.
Per ogni $m \in \{1, 2, 3, 4\}$ si costruisca, se esiste, un endomorfismo $g \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^4)$ di rango m tale che $\pi + (f \circ g) = id$.

Esercizio 2. (C, R1) Sia $\mathbb{K}$ un campo e siano p, q due numeri naturali positivi.
Fissate $A \in M(p, \mathbb{K})$ e $C \in M(q, \mathbb{K})$, al variare di $B \in M(p, q, \mathbb{K})$ si consideri la matrice a blocchi $M(B) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \in M(p + q, \mathbb{K})$.
Indichiamo con $\sim_{SD}$ la relazione di SD-equivalenza.

a) Si provi che, se almeno una tra A e C è invertibile, allora $M(B) \sim_{SD} M(0)$.

b) Si provi che, per ogni $D, E \in M(p, q, \mathbb{K})$, $M(B) \sim_{SD} M(B + AD + EC)$

Esercizio 3. (C, R2) Sia n un intero positivo fissato e sia $A \in M(n, \mathbb{C})$ una matrice invertibile tale che $A^{-1} \in \mathrm{Span}(I, A)$.

a) Determinare le possibili forme normali di Jordan di A.

b) Nel caso A abbia coefficienti reali, determinare le possibili forme normali di Jordan reali di A se per ogni $\lambda \in Sp(A)$, $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^2 = 2 \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$.

Esercizio 4. (C, R2) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 5 e sia φ un prodotto scalare su V di segnatura $(3, 2, 0)$.
Al variare di $W \subset V$ sottospazio, determinare tutte le possibili segnature di $\varphi_{|_W}$.

Esercizio 5. (C) Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ e $\mathbb{A}$ uno spazio affine su V. Fissati $v, w \in V$ linearmente indipendenti e $P \in \mathbb{A}$, siano $r, s \subset \mathbb{A}$ le rette $r = P + \mathrm{Span}(v)$, $s = P + \mathrm{Span}(w)$. Consideriamo due parallelogrammi, con lati paralleli a r e s, di vertici P, A, C, B e P, A', C', B', dove $A, A' \in r \setminus \{P\}$, $B, B' \in s \setminus \{P\}$. Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ i rapporti semplici tra P, A, A' e P, B, B', rispettivamente.

a) Determinare condizioni necessarie e sufficienti su λ e μ affinché la retta passante per A e B' e la retta passante per A' e B siano incidenti.

b) Nel caso in cui la retta passante per A e B' e la retta passante per A' e B si intersechino in $D \in \mathbb{A}$, mostrare che C, C' e D sono allineati.

Sigle: C=compito, R1=recupero primo compitino, R2=recupero secondo compitino.
Durata: C 3 ore; R1,R2 1,5 ore. Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.