Anno Accademico 2017/2018
Geometria I
Scritto del 17/1/2019

Attenzione: rispetto al testo dell'esame, alcuni punti sono stati modificati e/o agiunti.

Esercizio 1.
Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia $A \in M(m, n, \mathbb{K})$.
Diciamo che $M \in M(n, m, \mathbb{K})$ è una *pseudoinversa* di A se $MAM = M$ e $AMA = A$.

a) Sia M una pseudoinversa di A. Si dimostri che $\mathbb{K}^n = \operatorname{Im}(M) \oplus \operatorname{Ker}(A)$ e che $\mathbb{K}^m = \operatorname{Ker}(M) \oplus \operatorname{Im}(A)$. Provare che $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} M$.

b) Provare che AM e MA sono diagonalizzabili.

c) Si dimostri che per ogni sottospazio $V \subset \mathbb{K}^n$ supplementare di $\operatorname{Ker} A$ esiste una pseudoinversa M di A tale che $\operatorname{Im}(M) = V$. Mostrare che tale pseudoinversa diventa unica se si richiede che $\operatorname{Ker}(M) = W$, dove $W \subset \mathbb{K}^m$ è un fissato supplementare di $\operatorname{Im} A$.

d) Mostrare che se AM è simmetrica, allora $\operatorname{Ker} M = \operatorname{Ker} A^T$.

e) Mostrare che se MA è simmetrica, allora $\operatorname{Im} M = \operatorname{Im} A^T$.

f) Si dimostri che ogni $A \in M(m, n, \mathbb{R})$ ammette una pseudoinversa M tale che MA e AM siano simmetriche. Dimostrare che tale M è unica.

Esercizio 2.
Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione n e sia $f \in \operatorname{End}(V)$. Diciamo che f è *speciale* se per ogni $U \subset V$ sottospazio f-invariante di V, esiste $W \subset V$ sottospazio f-invariante tale che $V = U \oplus W$.

a) Siano $f \in \operatorname{End}(V)$ speciale e $Z \subset V$ un sottospazio f-invariante di V. Mostrare che $f_{|_Z} \in \operatorname{End}(Z)$ è speciale.

b) Dimostrare che $f \in \operatorname{End}(V)$ è speciale e triangolabile se e solo se f è diagonalizzabile.

Esercizio 3.
Al variare di A tra le matrici complesse 4×4 nilpotenti e di $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + t^3$ tra i polinomi monici complessi di grado 3, determinare le possibili forme di Jordan di $p(A)$.

Esercizio 4.
Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ di dimensione n e sia $f \in V^*$ un funzionale non nullo. Poniamo $\phi_f : V \times V \to \mathbb{K}$, $\phi_f(v, w) := f(v)f(w)$, per ogni $v, w \in V$.

a) Verificare che ϕ_f è un prodotto scalare su V.

b) Verificare che $\dim \operatorname{Rad}(\phi_f) = n - 1$.

c) Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$, $A = A^\top$, rk(A)=1. È vero che esiste $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ lineare tale che per ogni $X, Y \in \mathbb{C}^n$, $X^\top A Y = \phi_f(X, Y)$? (Giustificare la risposta)

d) Come nel punto c) sostituendo $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}$.

Durata: 3 ore. Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.