Anno Accademico 2017/2018
Geometria 1
Prima prova in itinere
14/2/2018

Sia $\mathbb{K}$ un campo, sia n un fissato numero intero maggiore di 1, e si denoti con $\sim_{SD}$ la relazione di SD-equivalenza.

Esercizio 1. Al variare di $k \in \mathbb{Q}$, sia U_k il sottospazio di $M(1,4,\mathbb{Q})$ definito da

$U_k = \{(x,y,z,t) \in M(1,4,\mathbb{Q}) \mid x+y+kz+kt=0,\ 2x+(2-k)y+3kz=0,\ (2-k)x+2y+4kt=0\}$.

Sia W il sottospazio di $M(1,4,\mathbb{Q})$ generato dall'insieme

$$\{(1,1,2,3),(1,0,-1,-1),(-2,1,1,1),(-2,2,4,5)\}.$$

a) Calcolare $\dim U_k$ al variare di k.

b) Determinare i valori di k per cui U_k e W sono isomorfi.

c) Determinare una base di $T := W \cap U_0$.

d) Determinare un sottospazio Z di $M(1,4,\mathbb{Q})$ tale che $M(1,4,\mathbb{Q}) = T \oplus Z$.

Esercizio 2. Siano $A, B \in M(n,\mathbb{K})$ tali che $\mathrm{rk}(A+B) = \mathrm{rk}\,A + \mathrm{rk}\,B$.

a) Dimostrare che $\mathrm{Im}(A+B) = \mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Im}(B)$.

b) Dimostrare che $\mathrm{Ker}(A) + \mathrm{Ker}(B) = \mathbb{K}^n$.

c) Supponiamo inoltre che $AB = BA$. Dimostrare che allora $AB = 0$.

d) Supponiamo $A', B' \in M(n,\mathbb{K})$ siano tali che $A'B' = B'A' = 0$; è vero allora che $\mathrm{rk}(A'+B') = \mathrm{rk}\,A' + \mathrm{rk}\,B'$?

Esercizio 3. Siano $A, B \in M(n,\mathbb{K})$.

a) Dimostrare che esiste $M \in M(n,\mathbb{K})$ tale che $A + M \sim_{SD} B$.

b) Dimostrare che, se esiste $M \in GL(n,\mathbb{K})$ tale che $A+M \sim_{SD} B$, allora $\mathrm{rk}\,A + \mathrm{rk}\,B \geq n$.

c) Dimostrare che, se esiste $M \in GL(n,\mathbb{K})$ tale che $A+M \sim_{SD} B$ e $A', B' \in M(n,\mathbb{K})$ sono tali che $A' \sim_{SD} A$, $B' \sim_{SD} B$, allora esiste $M' \in GL(n,\mathbb{K})$ tale che $A' + M' \sim_{SD} B'$.

d) Dimostrare che, se $\mathrm{rk}\,A + \mathrm{rk}\,B \geq n$, allora esiste $M \in GL(n,\mathbb{K})$ tale che $A+M \sim_{SD} B$.

Esercizio 4.
Sia $A \in M(n,\mathbb{K})$ che ammetta un autovalore λ di molteplicità geometrica $n-1$. Dimostrare che A è diagonalizzabile se e solo se $\mathrm{tr}(A) \neq n\lambda$.

Durata: 2 ore. Scrivere su tutti i fogli nome e numero di matricola.