Anno Accademico 2016/2017
Geometria 1
Prova scritta del 15/9/2017

Attenzione: questo non è il testo dato all'esame!

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n, e siano $f, g \in \mathrm{End}(V)$ due endomorfismi di V.

a) Mostrare che se $f+g$ è invertibile, allora esiste la somma diretta tra $\mathrm{Ker}\, f$ e $\mathrm{Ker}\, g$. Se inoltre esiste la somma diretta tra $\mathrm{Im}\, f$ e $\mathrm{Im}\, g$, allora $V = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Im}\, g$.

b) Mostrare che se esiste la somma diretta tra $\mathrm{Ker}\, f$ e $\mathrm{Ker}\, g$ ed esiste la somma diretta tra $\mathrm{Im}\, f$ e $\mathrm{Im}\, g$, allora $f+g$ è invertibile.

c) Mostrare che se esiste la somma diretta tra $\mathrm{Im}\, f$ e $\mathrm{Im}\, g$, allora f e g commutano se e solo se $fg = gf = 0$.

Supponiamo adesso che $f^2 = g^2 = 0$ e che $f+g$ sia invertibile.

c) Mostrare che f e g non commutano.

d) Mostrare che n è pari e che per ogni intero $k > 0$, $\mathrm{rk}(fg)^k = \mathrm{rk}(gf)^k = \frac{n}{2}$.

e) Mostrare che per ogni intero $k > 0$, $(f+g)^{2k} = (fg)^k + (gf)^k$

f) Mostrare che f e g sono coniugati e calcolarne la forma canonica di Jordan. Mostrare che non esiste una base di V che sia di Jordan per f e per g.

g) Mostrare che fg è idempotente (cioè $(fg)^2 = fg$) se e solo se esiste $(v_1, \ldots, v_n)$ una base di V di Jordan per f tale che $(v_n, \ldots, v_1)$ è una base di V di Jordan per g.

Esercizio 2. Data una matrice $n \times n$ reale simmetrica $M \in M(n, \mathbb{R})$, sia φ_M il prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ definito da $\varphi_M(x, y) = {}^t x M y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$.
Siano $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ simmetriche tali che φ_A è definito positivo. Dimostrare le seguenti affermazioni.

a) Se $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sono basi di $\mathbb{R}^n$ ortonormali per φ_A, allora le matrici di φ_B in tali basi, $M_{\mathcal{B}}(\varphi_B)$ e $M_{\mathcal{B}'}(\varphi_B)$, hanno lo stesso polinomio caratteristico.

b) Se φ_B è non degenere, $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{R}^n$ ortonormale per φ_A e ortogonale per φ_B e $\mathcal{B}'$ è una base di $\mathbb{R}^n$ ortonormale per $\varphi_{A^{-1}}$ e ortogonale per $\varphi_{B^{-1}}$, allora $M_{\mathcal{B}'}(\varphi_{B^{-1}})$ e $M_{\mathcal{B}}(\varphi_B)^{-1}$ hanno lo stesso polinomio caratteristico.

c) L'insieme degli $a \in \mathbb{R}$ tali che $\varphi_A + a\varphi_B$ è definito positivo è un intervallo non vuoto.

d) Esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\varphi_A + a\varphi_B$ è definito negativo se e solo se φ_B è definito.

e) Se φ_B è non degenere e $a \in \mathbb{R}$ è tale che $\varphi_A + a\varphi_B$ è definito positivo, allora le segnature di $a\varphi_{A^{-1}} + \varphi_{B^{-1}}$ e di φ_B coincidono.

f) Se φ_B è semidefinito positivo, allora per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $\det(A + a^2 B)\det(A + b^2 B) \geq \det(A + abB)^2$.