Anno Accademico 2016/2017
Geometria 1 – Prova scritta del 18/1/2018

Attenzione: questo non è il testo dato all'esame!

Per $n \geq 2$ e $1 \leq i \leq n$, data $M \in M(n, \mathbb{C})$ denotiamo con $M_{i,i}$ il minore principale di M ottenuto eliminando la i-ma riga e la i-ma colonna.

Esercizio 1. Fissato $n \geq 2$, sia $A \in M(n, \mathbb{C})$ una matrice con la prima colonna nulla.

a) Mostrare che per ogni intero k, $(A^k)_{1,1} = (A_{1,1})^k$.

b) Mostrare che $A_{1,1}$ nilpotente $\Rightarrow$ A nilpotente.

c) Sia $B \in M(n, \mathbb{C})$ una matrice tale che $\operatorname{tr} B^k = 0$ per $k = 1, \ldots, n-1$. Mostrare che $\operatorname{tr} B^n = 0 \iff \det B = 0$. *(Sugg.: può essere utile il teorema di Hamilton-Cayley.)*

d) Sia $B \in M(n, \mathbb{C})$ una matrice tale che $\operatorname{tr} B^k = 0$ per $k = 1, \ldots, n$. Mostrare che B è nilpotente. *(Sugg.: può essere utile il punto b.)*

Esercizio 2. Sia, $A \in M(n, \mathbb{C})$, una matrice con la prima colonna nulla e sia $B \in M(n, \mathbb{C})$ una matrice simile ad A con la k-ma colonna nulla, per un $1 \leq k \leq n$.

a) Mostrare che se $n = 2$, $A_{1,1}$ è simile a $B_{k,k}$.

b) Mostrare che se $n \geq 3$, $A_{1,1}$ invertibile $\Rightarrow$ $A_{1,1}$ è simile a $B_{k,k}$.

c) Mostrare che il risultato del punto precedente non è vero nel caso $A_{1,1}$ sia singolare.

Esercizio 3. Per $a \in \mathbb{R}$, sia φ_a il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ dato da $\varphi_a(X, Y) = {}^tX M_a Y$, per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^3$, dove

$$M_a = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

e siano $U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $W_a = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \ x + ay - z = 0\}$.

a) Determinare una base di $U^\perp$.

b) Per i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui U non è in somma diretta con $U^\perp$, trovare, dandone una base, due sottospazi $P, N \subset \mathbb{R}^3$ tali che ${\varphi_a}|_P$ sia definito positivo, ${\varphi_a}|_N$ sia definito negativo e $\mathbb{R}^3 = P \oplus N$.

c) Determinare gli $a \in \mathbb{R}$ per cui esiste un piano per l'origine $H \subset \mathbb{R}^3$ tale che $\dim H^\perp = 3$, e caratterizzare tali H.

d) Determinare gli $a \in \mathbb{R}$ per cui esiste un piano per l'origine $H \subset \mathbb{R}^3$ tale che $\dim H^\perp = 2$, e caratterizzare tali H.

e) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ vale che $(U \cap W_a)^\perp = U^\perp + W_a^\perp$?