Anno Accademico 2016/2017
Geometria 1
Prova scritta del 13/7/2017

Attenzione: questo non è il testo dato all'esame!

Esercizio 1. Fissato $n \geq 1$, siano $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ due matrici quadrate di ordine n a coefficienti reali tali che $A^2 + B^2 = AB$. Sia $N \in M(3, \mathbb{R})$ la matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Mostrare che A è invertibile se e solo se B è invertibile.

b) Mostrare che se $v \in \mathbb{R}^n$ è un autovettore comune ad A e B, allora $v \in \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} B$.

c) Se $A = I$, mostrare che n è pari e calcolare la forma canonica di Jordan di B.

d) Mostrare che per ogni $z \in \mathbb{C}$, $det((A + zB)(A + \bar{z}B))$ è reale non negativo.

e) Mostrare che esiste $z \in \mathbb{C}$ tale che $(A + zB)(A + \bar{z}B) = z(BA - AB)$ per ogni n, A, B come sopra. Dedurne che se $BA - AB$ è invertibile, allora n è divisibile per 3.

f) Mostrare che se $M \in M(3, \mathbb{R})$ è tale che $tr(M) = tr(M^2) = 0$ allora M è simile ad un multiplo di N oppure è nilpotente.

g) Per $n = 3$, mostrare che se $BA - AB$ è invertibile, $BA - AB$ è simile ad un multiplo positivo di N.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e sia $\psi \in PS(V)$ un prodotto scalare su V. Per $f \in \operatorname{End}(V)$ invertibile, sia $\phi_f \in PS(V)$ il prodotto scalare su V dato da $\phi_f(v, w) = \psi(v, w) + \psi(f(v), f(w))$, per ogni $v, w \in V$.

a) Mostrare che se ψ è semidefinito positivo, allora ϕ_f è semidefinito positivo e $rnk(\phi_f) \geq rnk(\psi)$.

b) Se ψ è non degenere allora $i_+(\phi_f) \geq i_+(\psi) - i_-(\psi)$.

c) Mostrare che se ψ è non degenere e non definito, allora esiste $f \in \operatorname{End}(V)$ invertibile tale che ϕ_f è non degenere e $i_+(\phi_f) = i_+(\psi) + 1$.

d) Mostrare che se ψ è definito positivo ed $f \in \operatorname{End}(V)$ è tale che $f^k = id$ per qualche $k > 0$, allora esiste $\varphi \in PS(V)$ definito positivo tale che $\phi_f + \varphi$ è definito positivo e f è un'isometria per $\phi_f + \varphi$.

(Oss.: per $\phi \in PS(V)$ indichiamo con $i_+(\phi)$ e $i_-(\phi)$ e $rnk(\phi)$ gli indici di positività, negatività e il rango di ϕ, rispettivamente.)

Esercizio 3. Per $t \in \mathbb{R}$, sia F_t la famiglia delle coniche C del piano proiettivo reale $\mathbb{RP}^2$ tali che i punti $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$ e $[1, t - 1, t]$ appartengono al supporto di C.

a) Mostrare che $\mathcal{F}_t$ non contiene coniche di rango 1.

a) Mostrare che $\mathcal{F}_t$ è in bigezione con la retta proiettiva reale $\mathbb{RP}^1$.

b) Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, il numero di coniche degeneri in $\mathcal{F}_t$.