Geometria 1
Prova in itinere del 26/5/2017

Esercizio 1.
Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita e sia $\varphi \in PS(V)$ un prodotto scalare definito positivo su V. Dato $f \in \operatorname{End}(V)$ un endomorfismo e dettto f^* il suo aggiunto, sia $g = ff^* + f^*f$.

(a) Dimostrare che $\ker g = \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} f^*$.

(b) Dimostrare che g è diagonalizzabile.

(c) Nel caso in cui $f^2 = 0$, dimostrare che esiste una base ortonormale di $\operatorname{Im} f$ di autovettori per g.

(d) Nel caso in cui $f^2 = 0$, dimostrare che V è somma diretta ortogonale di $\operatorname{Ker} g$, $\operatorname{Im} f$ e $\operatorname{Im} f^*$, $V = \operatorname{Ker} g \oplus^{\perp} \operatorname{Im} f \oplus^{\perp} \operatorname{Im} f^*$.

Esercizio 2.
Si consideri, in $\mathbb{R}^2$ dotato della struttura affine, la conica C di equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

(a) Mostrare che esiste un unico punto $N \in \mathbb{R}^2$ per cui ogni retta per N interseca C in due punti Q_1, Q_2 (che variano al variare della retta) tali che $N = \frac{1}{2}Q_1 + \frac{1}{2}Q_2$.

(b) Dati $P, Q \in C$, si dimostri che esiste una affinità f di $\mathbb{R}^2$ tale che $f(C) = C$ e $f(P) = Q$. Tale f è lineare?.

Esercizio 3.
Dato $\lambda \in \mathbb{R}$, si consideri, in $\mathbb{R}^2$ dotato della struttura affine, la conica C_λ di di equazione $\lambda x^2 + 2y^2 + 2xy + 2\lambda x + 2y + 2 = 0$.
Riconoscere, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il tipo della conica C_λ.