Corso di Geometria I

Appello del 9/6/2016

La durata della prova è di 3 ore.

Esercizio 1.

(a) Si determini una base di $\mathbb{C}^4$ di autovettori o una base di Jordan per la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(4, \mathbb{C}).$$

(b) Al variare del parametri $b \in \mathbb{C}$ si consideri la matrice

$$N_b = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ b-2 & b & 0 & b-1 \\ b-3 & b-1 & 1 & -1 \\ 1-b & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(4, \mathbb{C})$$

e si determinino i valori di b per cui N_b è diagonalizzabile.

(c) Si determinino i valori di b per cui N_b è simile alla matrice A.

Esercizio 2.

(1) Sia Φ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V di dimensione finita e sia $f \in End(V)$ un endomorfismo tale che $\Phi(f(x), f(y)) = \Phi(x, y)$ per ogni $x, y \in V$. Sia W un supplementare di $Rad(\Phi)$. Si provino i seguenti fatti:

(a) $\dim f(W) = \dim W$.

(b) $f(W) \cap Rad(\Phi) = \{0\}$.

(c) $(f(W))^\perp = Rad(\Phi)$.

(d) $Rad(\Phi)$ è f-invariante.

(2) Fissato $V = \mathbb{R}_3[x]$, si consideri il prodotto scalare Φ su V definito da

$$\Phi(p, q) = p(1)q(1) + 2p(-1)q(-1) \qquad \forall p, q \in V$$

e il sottospazio vettoriale $W = Span(1 + x, 2 - x - x^2)$. Si dica se esiste un endomorfismo $f \in End(V)$ che verifichi tutte le seguenti proprietà:

(a) $\Phi(f(x), f(y)) = \Phi(x, y)$ per ogni $x, y \in V$

(b) $f(W) \subseteq W$

(c) $\operatorname{rk}(f) = 2$

(d) $f(1 + x) \in Span(2 - x - x^2)$.

Se un tale endomorfismo esiste, si dica se è unico.

Esercizio 3.

(a) Se $P_1 = (1, 0), P_2 = (2, 1), P_3 = (1, -1)$, si costruisca un'affinità L di $\mathbb{R}^2$ tale che $L(P_1) = P_2$, $L(P_2) = P_3$, $L(P_3) = P_1$. Si verifichi che $L^3 = id$ e si determini il luogo dei punti fissi di L.

(b) Sia $\mathcal{C}$ la conica di $\mathbb{R}^2$ di equazione $3x^2 + 2y^2 + 6xy - 8x - 8y + 1 = 0$ e, al variare di $h \in \mathbb{R}$, si consideri la conica $\mathcal{D}_h$ di $\mathbb{R}^2$ di equazione $x^2 + 2(h-1)xy + 2hy^2 + 2y + 1 = 0$. Si determini il luogo dei centri di $\mathcal{C}$ e si calcolino i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui $L(\mathcal{C}) = \mathcal{D}_h$.

(c) Sia g un'affinità di $\mathbb{R}^2$ per la quale esiste $Q \in \mathbb{R}^2$ tale che $g(Q) \neq Q$ e $g^3(Q) = Q$. Si provi che il punto $g^2(Q)$ non è allineato con Q e $g(Q)$, che $g^3 = id$ e che g ha un unico punto fisso.