Corso di Geometria 1 - A.A. 2015-2016

Secondo compitino - 5/4/2016

Esercizio 1. Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

a) Sia $n \geq 2$ un numero naturale assegnato. Siano $A, B \in M(n, \mathbb{C})$ e sia $N = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \in M(2n, \mathbb{C})$.

(i) Se esiste una base ciclica per N, allora esiste una base ciclica per A e una base ciclica per B.

(ii) Se esiste una base ciclica per A e una base ciclica per B, allora esiste una base ciclica per N.

b) Sia $k \in \mathbb{N}$ un numero naturale positivo fissato e siano $A, B \in M(2k, \mathbb{R})$ matrici tali che $A^2 + 2A + 5I = B^2 + 2B + 5I = 0$. Allora A e B sono simili.

c) Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$. Allora $W = \{p(t) \in \mathbb{C}[t] \mid p(A) \text{ è diagonalizzabile}\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}[t]$.

Esercizio 2. Sia $k \geq 2$ un numero naturale. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e siano $f_1, \ldots, f_k \in End(V)$ endomorfismi triangolabili tali che $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$ per ogni $i, j \in \{1, \ldots, k\}$.

a) Si dimostri che esiste un autovettore comune per $f_1, \ldots, f_k$.

b) Si dimostri che esiste una base di V a bandiera per $f_1, \ldots, f_k$.

Esercizio 3. Al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{C}$ si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 1-b & a & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M(4, \mathbb{C}).$$

a) Si determinino i valori di $a, b \in \mathbb{C}$ per cui A è diagonalizzabile.

b) Fissato $b = 1$, si determinino i valori di $a \in \mathbb{C}$ per cui esiste una base di $\mathbb{C}^4$ ciclica per A.

c) Fissati $b = 1$ e $a = 1$, si determini una base di $\mathbb{C}^4$ di Jordan per A.