Corso di Geometria I

Appello del 4/7/2016

La durata della prova è di 3 ore.

Esercizio 1.
Siano V, W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, $\dim V = n$, $\dim W = p$ con $n \geq p$. Fissato $f \in W^*$, $f \neq 0$, si consideri l'applicazione lineare $L\colon \operatorname{Hom}(V, W) \to V^*$ definita da $L(g) = f \circ g$ per ogni $g \in \operatorname{Hom}(V, W)$.

(a) Si calcoli $\dim \operatorname{Ker} L$.

(b) Sia $\varphi \in V^*$, $\varphi \neq 0$. Si provi che per ogni intero $k \in \{1, \ldots, p\}$ esiste $g \in \operatorname{Hom}(V, W)$ tale che $L(g) = \varphi$ e $\operatorname{rk} g = k$.

Esercizio 2.

(a) È vero che, se una conica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^2$ passa per i vertici di un parallelogramma, allora $\mathcal{C}$ ha per centro il punto di intersezione delle diagonali del parallelogramma?

(b) Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ una matrice simmetrica. È vero che esiste $B \in M(n, \mathbb{R})$ simmetrica e definita positiva tale che $A + B$ ha n autovalori distinti ed è definita positiva?

(c) Siano $A, B \in M(n, \mathbb{C})$ matrici non nilpotenti tali che $A^4 = A^3$, $B^4 = B^3$, $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$ e $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Ker} B$. Per quali $n \geq 3$ dalle ipotesi segue che A e B sono simili?

Esercizio 3.
Sia Φ un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V e sia $f \in End(V)$ un endomorfismo triangolabile tale che $\Phi(f(v), f(w)) = \Phi(v, w)$ per ogni $v, w \in V$. Si supponga che il cono isotropo $\mathcal{I}(\Phi)$ non contenga autovettori di f. Si provino i seguenti fatti:

(a) esiste una base ortogonale di V di autovettori per f

(b) Φ è non degenere

(c) $f^2 = id$.

Esercizio 4.
Sia H il piano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x - y + 1 = 0$ e sia $\mathcal{L}$ la famiglia delle rette $r_{a,b}$ di $\mathbb{R}^3$ di equazioni parametriche $x = 2 + t, y = b - 1 + at, z = 1 - at$, al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Si determini l'insieme $\mathcal{R}$ delle rette $r_{a,b} \in \mathcal{L}$ aventi distanza $\sqrt{2}$ dal piano H e sghembe con la retta ρ di equazioni $x = 3 - t, y = 6 + 2t, z = 4t$.

(b) Se ρ_H è la riflessione ortogonale rispetto al piano H, si determini, se esiste, una retta $s \in \mathcal{L}$ tale che $\rho_H(s)$ passi per i punti $(1, 3, 1)$ e $(-1, 2, 3)$.