Corso di Geometria 1 - A.A. 2015-2016

Terzo compitino - 24/5/2016

Esercizio 1. Dire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali false.

a) Siano $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ due matrici simmetriche. Se A e B sono simili, allora esiste una matrice $N \in O(n)$ tale che $B = N^{-1}AN$.

b) Sia V uno spazio vettoriale, Φ un prodotto scalare degenere su V e ψ un prodotto scalare non degenere su V. Allora esiste una base ortogonale comune.

c) Sia Φ un prodotto scalare su un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale V e sia $g \in O(V, \Phi)$. Allora per ogni funzionale Φ-rappresentabile $f \in V^*$, il funzionale ${}^t g(f)$ è Φ-rappresentabile.

Esercizio 2. Sia Φ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ associato rispetto alla base canonica alla matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Siano $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3y + z = 0\}$ e $H_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid kx + y - z = 0\}$.

a) Si determini $L \cap \mathcal{I}(\Phi)$, dove $\mathcal{I}(\Phi)$ denota l'insieme dei vettori isotropi per Φ.

b) Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui esiste $f \in O(\mathbb{R}^3, \Phi)$ tale che $f(L) = H_k$ e $f(H_k) = L$.

c) Fissato uno dei valori di k trovati nel punto b), si determinino tutte le isometrie $f \in O(\mathbb{R}^3, \Phi)$ tali che $f(L) = H_k$ e $f(H_k) = L$.

Esercizio 3. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ le rette

$$r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, y = 0\} \qquad s = \{(t, 1, t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

a) Sia L il piano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $z = 0$. Si costruisca, se esiste, un'affinità f di $\mathbb{R}^3$ che verifica le seguenti condizioni:

$$f(s \cap L) = r \cap L, \ f(r \cap L) = s \cap L, \ f(s) = r, \ Fix(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 1, z = 0\}$$

dove $Fix(f)$ denota il luogo dei punti fissi di f.

b) Sia W l'unione delle rette di $\mathbb{R}^3$ che intersecano sia r che s e che sono parallele al piano H di equazione $x + y + z = 3$. Si provi che W è il supporto di una quadrica $\mathcal{C}$ e si determini la forma canonica affine di tale quadrica.

c) Senza calcolare esplicitamente equazioni, si dica se, facendo variare il piano H, la costruzione del punto b) produce sempre un insieme che è il supporto di una quadrica affinemente equivalente alla quadrica $\mathcal{C}$ trovata sopra.