Geometria 1
Anno Accademico 2015/2016
Prova scritta del 26/1/2017

Esercizio 1. Si consideri, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice reale simmetrica

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \lambda+1 \end{pmatrix}.$$

Sia $\Phi_\lambda \colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ definito da

$$\Phi_\lambda(X,Y) = {}^tXA_\lambda Y \qquad \forall X,Y \in \mathbb{R}^4.$$

a) Si determini la segnatura di Φ_λ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Si determini, se esiste, un sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 tale che $\Phi_\lambda|_U$ sia definito negativo per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) Si determini, se esiste, un sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 tale che la segnatura di $\Phi_\lambda|_W$ sia $(1,1,0)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. In caso esista, dire se tale W è unico.

d) Per $\lambda = 2$, determinare un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ totalmente isotropo di dimensione massima.

Esercizio 2. Sia $n \geq 2$ un intero fissato.
Sia f un endomorfismo nilpotente di $\mathbb{C}^n$ con la proprietà che esiste un intero $k \geq 1$ tale che $\dim \operatorname{Ker} f^{k+1} = \dim \operatorname{Ker} f^k + 1$.

a) Mostrare che nella forma canonica di Jordan di f è presente un unico blocco di ordine massimo.

b) Mostrare che esiste un unico intero $h \geq 1$ tale che $\dim \operatorname{Im} f^h = 1$.

c) Mostrare che esiste un sottospazio W di $\mathbb{C}^n$ di dimensione 1 tale che ogni base di $\mathbb{C}^n$ di Jordan per f contiene un generatore di W.

d) Dare un esempio di un endomorfismo nilpotente g di $\mathbb{C}^n$ con la proprietà che $\dim \operatorname{Ker} g^2 = \dim \operatorname{Ker} g + 1$ per cui non esista un sottospazio Z di $\mathbb{C}^n$ di dimensione 1 tale che ogni base di $\mathbb{C}^n$ di Jordan per g^2 contenga un generatore di Z.

Esercizio 3.

Sia C la conica di $\mathbb{R}^2$ di equazione $3x^2 + 2y^2 - 4xy + 2x + 4y + 1 = 0$.

a) Mostrare che per ogni $P \in \mathbb{R}^2$ esiste un'affinità $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $f(P) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ e $f(C)$ è una circonferenza di raggio 1 con centro sull'asse x.

b) Determinare il luogo dei punti Q di $\mathbb{R}^2$ per cui esiste un'affinità $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $g(Q) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ e $g(C)$ è la circonferenza di raggio 1 con centro $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

c) Mostrare che il luogo dei punti di $\mathbb{R}^2$ ottenuti come punti medi delle corde di un'ellisse ottenute dalle rette passanti da un punto fissato è contenuto nel supporto di una conica.