Corso di Geometria Analitica e Algebra Lineare
Terzo compitino - 19/5/2015

Esercizio 1.
Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e siano $v_1, \dots, v_k$ vettori di V linearmente indipendenti. Per ogni scelta di numeri reali $a_1, \dots, a_k$ tali che $a_i \neq 0$ per ogni $i = 1, \dots, k$, si consideri il prodotto scalare $\Phi : V^* \times V^* \to \mathbb{R}$ definito da

$$\Phi(f, g) = \sum_{i=1}^{k} a_i f(v_i) g(v_i) \quad \forall f, g \in V^*.$$

a) Al variare di $a_1, \dots, a_k$, si determini la segnatura di Φ.

b) Si verifichi che $\mathrm{Rad}(\Phi) = \mathrm{Ann}(\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k))$.

c) Sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia φ il funzionale di $(\mathbb{R}^3)^*$ definito da $\varphi(x, y, z) = x + y - 2z$. Si determinino vettori $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^3$ linearmente indipendenti e numeri reali $a_1, \dots, a_k$ tali che $\mathrm{Rad}(\Phi) = \mathrm{Span}(\varphi)$.

Esercizio 2.
Sia $n \geq 1$ un intero, sia $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ e sia $W(f)$ il sottospazio dei prodotti scalari b su $\mathbb{R}^n$ tali che

$$b(f(x), f(y)) = b(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

a) Si provi che, se f non è iniettiva, ogni $b \in W(f)$ è degenere.

b) Sia λ un autovalore pef f e sia V_λ il corrispondente autospazio. Si provi che, se $\lambda \neq \pm 1$ e $b \in W(f)$, allora $b|_{V_\lambda} = 0$.

c) Sia $b \in W(f)$. Si provi che, se λ, μ sono autovalori per f e $\lambda\mu \neq 1$, allora gli autospazi V_λ e V_μ sono ortogonali.

d) Si calcoli $\dim W(f)$ nel caso in cui $f^2 = f$.

e) Si dica se esiste un isomorfismo $f \in GL(n, \mathbb{R})$ tale che $\dim W(f) = 1$.

Esercizio 3.

a) Si verifichi che il luogo geometrico $\mathcal{Q}$ dei punti di $\mathbb{R}^3$ equidistanti del piano $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2\}$ e dalla retta $r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0,\ y = 1\}$ è una quadrica e se ne determini il tipo affine.

b) Si consideri la famiglia $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_h \mid h \in \mathbb{R}\}$ delle quadriche $\mathcal{D}_h$ di $\mathbb{R}^3$ di equazione

$$2x^2 + 2y^2 + hz^2 - 2hxy + 2(h + 1)z + 2 = 0.$$

Si dica se $\mathcal{D}$ contiene quadriche affinemente equivalenti a $\mathcal{Q}$.

c) Per ogni $h \in \mathbb{R}$ sia $\mathcal{C}_h$ la conica ottenuta proiettando sul piano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ l'inersezione di $\mathcal{D}_h$ con il piano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - 1 = 0\}$. Si determini, se esiste, un valore $h \in \mathbb{R}$ tale che le quadriche $\mathcal{D}_0$ e $\mathcal{D}_h$ non siano affinemente equivalenti, ma le coniche $\mathcal{C}_0$ e $\mathcal{C}_h$ siano invece affinemente equivalenti.