Corso di Geometria Analitica e Algebra Lineare
Secondo compitino - 25/3/2015

Esercizio 1.
Per ogni $A \in M(n, \mathbb{R})$, si consideri l'applicazione lineare

$$L_A : M(n, \mathbb{R}) \to M(n, \mathbb{R}), \quad L_A(X) = AX - XA.$$

a) Si provi che se le matrici $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ sono simili, allora $\dim \operatorname{Ker} L_A = \dim \operatorname{Ker} L_B$.

b) Si calcoli $\dim \operatorname{Ker} L_A$ nel caso in cui $A^2 = I$ e $\operatorname{tr}(A) = p$.

Esercizio 2.
Al variare di $h \in \mathbb{R}$, si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & h-1 & -1 \\ -1 & 0 & 2h & h \\ 0 & 0 & 0 & 2h \end{pmatrix}$$

a) Si determinino i valori di h per cui A_h è diagonalizzabile.

b) Fissato $h = 1$, si determini, se esiste, una base di $\mathbb{R}^4$ di Jordan per A_1.

Esercizio 3.
Sia $f \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^n)$ un endomorfismo di $\mathbb{C}^n$ avente esattamente due autovalori $\lambda_1 \neq \lambda_2$ di molteplicità geometrica rispettivamnete d_1 e d_2. Sia

$$\mathcal{L} = \{W \subset \mathbb{C}^n \mid W \text{ è un sottospazio } f\text{-invariante e } f|_W \text{ è diagonalizzabile}\}.$$

a) Si determini l'intero $M = \max\{\dim W \mid W \in \mathcal{L}\}$; inoltre per ogni intero m tale che $1 \leq m \leq M$, si dica se esiste un sottospazio $W \in \mathcal{L}$ di dimensione m e se tale sottospazio è unico.

b) Supponendo che gli autovalori $\lambda_1 \neq \lambda_2$ abbiano entrambi molteplicità geometrica 1, si provi che esistono esattamente due sottospazi di $\mathbb{C}^n$ di dimensione $n-1$ e f-invarianti.