Corso di Geometria analitica e algebra lineare

Appello del 9/2/2016

La durata della prova è di 3 ore.

Esercizio 1.
Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $f \in End(V)$ un endomorfismo triangolabile. Sia $sp(f)$ lo spettro di f (ossia l'insieme degli autovalori di f).

(a) Si provi che, se ogni sottospazio vettoriale f^2-invariante di V è anche f-invariante, allora t^2 non divide il polinomo minimo m_f di f.
(b) Si provi che, se $sp(f) = \{1\}$, allora $m_f = m_{f^2}$.
(c) È vero che, quando $m_f = m_{f^2}$, allora $sp(f) = \{1\}$?
(d) Si provi che, se $sp(f) = \{1, -1\}$ e $m_f = (t-1)^p(t+1)^q$, allora $m_{f^2} = (t-1)^{\max(p,q)}$.

Esercizio 2.
Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e siano W_1, W_2 due sottospazi vettoriali di V. Sia Φ un prodotto scalare su V tale che

$$\dim(W_1)^\perp = n - \dim W_1, \qquad \dim(W_2)^\perp = n - \dim W_2 + 1.$$

(a) Si determini la dimensione di $Rad(\Phi) \cap W_2$.
(b) Si provi che non esiste la somma diretta tra W_2 e $(W_1)^\perp$.
(c) Fissato $V = \mathbb{R}^4$ e

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

si consideri il prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ definito da $\Phi(X,Y) = {}^tXAY$ per ogni $X, Y \in \mathbb{R}^4$. Si costruiscano, se esistono, due sottospazi W_1, W_2 tali che $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$, $\dim(W_1)^\perp = 4 - \dim W_1$, $\dim(W_2)^\perp = 4 - \dim W_2 + 1$ e $\dim W_2 = 2$.

Esercizio 3.

(a) Siano V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e $f \in End(V)$ un endomorfismo triangolabile. Sia W un sottospazio vettoriale di V f-invariante. Si provi che esiste una bandiera $V_1, \ldots, V_n$ per V costituita da sottospazi f-invarianti tale che $V_j = W$ per qualche $j \in \{1, \ldots, n\}$.
(b) Nel caso in cui $V = \mathbb{R}^4$ e $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z = 0, 3y - t = 0\}$, si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^4$ definito da $f(X) = AX$ per ogni $X \in \mathbb{R}^4$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si verifichi che W è f-invariante e si determini una bandiera $V_1, \ldots, V_4$ per $\mathbb{R}^4$ costituita da sottospazi f-invarianti tale che $V_j = W$ per qualche $j \in \{1, \ldots, 4\}$.